12 Určitý integrál

Príklad 1. Vypočítajte určitý integrál
$$\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$$

Riešenie.
Delením polynómov, integrovaním a použitím Newton-Leibnitzovho vzorca dostaneme
$$\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = \int_0^1 1 - \frac{1}{x+1}\,dx = [x]_0^1 - [\ln(x+1)]_0^1 = 1 - \ln 2.$$

Príklad 2. Vypočítajte určitý integrál
$$\int_1^e x \ln^3 x\,dx.$$

Riešenie. Použijeme metódu per partes.
Označme
$$\begin{aligned} f' &= x & f &= \frac{x^2}{2} \\ g &= \ln^3 x & g' &= 3(\ln^2 x)\,\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$\int_1^e x \ln^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln^3 x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} 3\ln^2 x\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}\int_1^e x\ln^2 x\;dx.$$

Opäť použijeme metódu per partes a
označíme
$$\begin{aligned} f' &= x & f &= \frac{x^2}{2} \\ g &= \ln^2 x & g' &= 2(\ln x)\,\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}\int_1^e x\ln^2 x\;dx &= \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}\left(\left[\frac{x^2}{2}\ln^2 x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} 2\ln x\,\frac{1}{x}\,dx\right) = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{3e^2}{4} + \frac{3}{2}\int_1^e x\ln x\;dx. \end{aligned}$$

Tretíkrát použijeme metódu per partes a
označíme
$$\begin{aligned} f' &= x & f &= \frac{x^2}{2} \\ g &= \ln x & g' &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$-\frac{e^2}{4} + \frac{3}{2}\left(\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx\right) = -\frac{e^2}{4} + \frac{3}{2}\frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

Príklad 3. Vypočítajte určitý integrál

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

Riešenie. Použijeme substitučnú metódu.
Substitúcia

$$y = x^2+1, \qquad dy = 2xdx$$

vedie k

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2x^2\sqrt{x^2+1}} 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{1}{(y-1)\sqrt{y}}\,dy.$$

Použijeme ďalšiu substitúciu

$$y = t^2, \qquad dy = 2tdt.$$

Teraz

$$\frac{1}{2}\int_2^5 \frac{1}{(y-1)\sqrt{y}}\,dy = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{t-1}\,dt - \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{t+1}\,dt.$$

v poslednom kroku sme použili rozklad na elementárne zlomky.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{t-1}\,dt - \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{t+1}\,dt &= \frac{1}{2}\left[\ln(t-1)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\left[\ln(t+1)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \\
&= \frac{1}{2}\ln(\sqrt{5}-1) - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1) - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{5}+1) + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1) = \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}-1)}.
\end{aligned}$$