11 Neurčitý integrál pokračovanie

Príklad 1. Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}\,dx$$

Riešenie. Substitúcia

$$x = t^2, \qquad dx = 2t\,dt$$

vedie k

$$\int \frac{t+1}{t^2+t+1} 2t\,dt = 2\int \frac{t^2+t}{t^2+t+1}\,dt.$$

Delením polynómov prejdeme k

$$2\int \frac{t^2+t}{t^2+t+1}\,dt = 2\int 1 - \frac{1}{t^2+t+1}\,dt =$$
$$= 2t - 2\int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt = 2t - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c.$$

Vyjadrením $t = \sqrt{x}$ a spätnou substitúciou do výsledku dostaneme

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}\,dx = 2\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}} + c.$$

Príklad 2. Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x(\sqrt{x}+1)}\,dx.$$

Riešenie. Hodí sa substitúcia

$$x = t^6, \qquad dx = 6t^5\,dt.$$

Jej použitím dostaneme

$$\int \frac{t^2+2}{t^6(t^3+1)}\,6t^5\,dt = 6\int \frac{t^2+2}{t^4+t}\,dt.$$

Rozklad integrovanej funkcie na elementárne zlomky má tvar

$$\frac{t^2+2}{t^4+t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-t+1}.$$

Po vypočítaní koeficientov

$$\frac{t^2+2}{t^4+t} = \frac{2}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{t+1}{t^2-t+1}.$$

Potom

$$\begin{aligned}
6\int \frac{t^2+2}{t^4+t}\,dt &= 6\int \frac{2}{t}-\frac{1}{t+1}-\frac{t+1}{t^2-t+1}\,dt = \\
&= 12\ln|t| - 6\ln|t+1| - 3\int \frac{2t-1+3}{t^2-t+1}\,dt = \\
&= 12\ln|t| - 6\ln|t+1| - 3\ln(t^2-t+1) - 9\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + c.
\end{aligned}$$

Vyjadrením $t=\sqrt[6]{x}$ a spätnou substitúciou do výsledku dostaneme

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x(\sqrt{x}+1)}\,dx = 2\ln x - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) - 3\ln(\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1) - 6\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}} + c.$$

Príklad 3. Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx.$$

Riešenie. Použitím substitúcie

$$x = 2\sin t, \qquad dx = 2\cos t\,dt$$

dostaneme

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos t\,dt = \int 4\cos^2 t\,dt = \int 2(1+\cos 2t)\,dt = 2t + \sin 2t.$$

Spätnou substitúciou $t = \arcsin\frac{x}{2}$ dostaneme

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \sin 2(\arcsin\frac{x}{2}) + c = 2\arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + c.$$