10 Neurčitý integrál

Príklad 1. Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \sin^2 x \, dx$$

Riešenie.

Využijeme rovnosť

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$$

Potom

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right) \, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c.$$

Príklad 2. Metódou per partes vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \ln^2 x \, dx$$

Riešenie.

Označme

$$\begin{aligned} f' &= 1 & f &= x \\ g &= \ln^2 x & g' &= 2 \ln x \, \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$\int \ln^2 x \, dx = x \cdot \ln^2 x - \int x 2 \ln x \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx.$$

Opäť použijeme metódu per partes a pri označení

$$\begin{aligned} f' &= 1 & f &= x \\ g &= \ln x & g' &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

dostaneme

$$x \cdot \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx = x \cdot \ln^2 x - 2\left(x \cdot \ln x - \int x \, \frac{1}{x} \, dx\right) = x \cdot \ln^2 x - 2\left(x \cdot \ln x - x\right) = x\left(\ln^2 x - 2 \ln x + 2\right) + c.$$

Príklad 3. Metódou per partes vypočítajte neurčitý integrál

$$\int x (\operatorname{arctg} x)^2 \, dx$$

Riešenie.

Zvoľme

$$\begin{aligned} f' &= x & f &= \frac{x^2}{2} \\ g &= (\operatorname{arctg} x)^2 & g' &= 2 \operatorname{arctg} x \, \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

$$\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot(\operatorname{arctg} x)^2 - \int \frac{x^2}{2} 2\operatorname{arctg} x\,\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot(\operatorname{arctg} x)^2 - \int \operatorname{arctg} x\,\frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$$

Počítajme posledný integrál

$$\int \operatorname{arctg} x\,\frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

zvlášť.

Použijeme v ňom metódu per partes a zvolíme

$$f' = \frac{x^2}{1+x^2} \qquad f = x - \operatorname{arctg} x$$
$$g = \operatorname{arctg} x \qquad g' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Poznamenajme, že funkciu f sme vypočítali ako

$$f = \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2}\,dx = x - \operatorname{arctg} x$$

Teraz dostaneme

$$\int \operatorname{arctg} x\,\frac{x^2}{1+x^2}\,dx = (x - \operatorname{arctg} x)\operatorname{arctg} x - \int (x - \operatorname{arctg} x)\frac{1}{1+x^2}\,dx =$$
$$= (x - \operatorname{arctg} x)\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int \operatorname{arctg} x\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Integrál

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Integrál

$$\int \operatorname{arctg} x\frac{1}{1+x^2}\,dx = (\operatorname{arctg} x)^2 - \int \operatorname{arctg} x\frac{1}{1+x^2}\,dx,$$

pri požití metódy per partes, kde

$$f' = \frac{1}{1+x^2} \qquad f = \operatorname{arctg} x$$
$$g = \operatorname{arctg} x \qquad g' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Preto

$$2\int \operatorname{arctg} x\frac{1}{1+x^2}\,dx = (\operatorname{arctg} x)^2$$

a

$$\int \operatorname{arctg} x\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2.$$

Postupným dosadzovaním dostaneme

$$\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot(\operatorname{arctg} x)^2 - (x - \operatorname{arctg} x)\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + c$$

Príklad 4. Použitím substitúcie vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \frac{\ln^5 x}{x}\,dx$$

Riešenie. Substitúcia

$$y = \ln x, \qquad dy = \frac{1}{x}dx$$

vedie k

$$\int \frac{\ln^5 x}{x}\,dx = \int y^5\,dy = \frac{1}{6}y^6 = \frac{1}{6}(\ln x)^6 + c.$$

Príklad 5. Použitím substitúcie vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \frac{\cos x}{3+\cos^2 x}\,dx$$

Riešenie. Substitúcia

$$y = \sin x, \qquad dy = \cos x dx$$

vedie k

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{3+\cos^2 x}\,dx &= \int \frac{1}{3+1-y^2}\,dy = \int \frac{1}{4-y^2}\,dy = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2+y}\,dy + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2-y}\,dy = \\ &= \frac{1}{4}\ln|2+y| - \frac{1}{4}\ln|2-y| = \\ &= \frac{1}{4}\ln|2+\sin x| - \frac{1}{4}\ln|2-\sin x| = \frac{1}{4}\ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x} + c.\end{aligned}$$