1. Funkcia. Jej Definícia a niektoré vlastnosti funkcie.

Definícia. Nech $A \subset R$, $B \subset R$. Zobrazenie f, ktoré každému $x \in A$ priradí jediné $y \in B$ nazývame reálna funkcia.

Množinu A nazývame definičný obor a značíme D_f.

Ak v úlohe nie je zadaný definičný obor, považujeme za D_f najväčšiu množinu, na ktorej má funkčný predpis f zmysel.

V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f.

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. $f(x) = \dfrac{x^2-7x+10}{\sqrt{x+1}}$.
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{2x+3}\right)$.
5. $f(x) = \ln\left(-x^2+5x-6\right)$.
6. $f(x) = \ln(\cos x)$.

Množinu $H_f = \{y \in B;\ \exists x \in A, f(x) = y\}$ nazývame obor hodnôt funkcie f.
Množinu $G_f = \{[x, f(x)];\ x \in A\}$ nazývame graf funkcie f.

V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor a obor hodnôt funkcie. Načrtnite graf. Rozhodnite, či je funkcia ohraničená a nájdite jej maximum resp. minimum (ak existuje).

7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
8. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. 8.1 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
10. $f(x) = |x+1| - |x-1|$. 10.1 $f(x) = |x+1| - |x-2|$.
11. $f(x) = |x+1| + |x-1|$.

Definícia. Nech A je symetrická množina. Reálnu funkciu $f : A \to B$ nazývame:
párna, ak $\forall x \in A;\ f(-x) = f(x)$,
nepárna, ak $\forall x \in A;\ f(-x) = -f(x)$.

V nasledujúcich príkladoch rozhodnite, či je funkcia f párna alebo nepárna.

12. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.
13. $f(x) = \dfrac{x^3+x}{1-x^2}$.
14. $f(x) = \tan(x^3)$.
15. $f(x) = \cos(x^3+x)$.
16. $f(x) = \ln(x^2-1)$.
17. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-x^2}}{x^3+1}$.

Definícia. Nech funkcia $f : A \to B$ je bijektívna. Funkciu $g : B \to A$, pre ktorú platí

$$g(f(x)) = x, \text{ pre každé } x \in A$$

a súčasne

$$f(g(x)) = x, \text{ pre každé } x \in B$$

nazývame inverzná funkcia k funkcii f.

Značíme $g = f^{-1}$

V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f, inverznú funkciu f^{-1} a obor hodnôt funkcie f.

18. $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$.
19. $f(x) = \dfrac{3x-7}{2x+1}$.
20. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
21. $f(x) = e^{\sqrt{x^3+1}}$.
22. $f(x) = x^2 - x, \quad$ ak $x \geq \frac{1}{2}$.
23. $f(x) = x^2 - x, \quad$ ak $x \leq \frac{1}{2}$.
24. $f(x) = \sqrt{1 - e^x}$.

25.* $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

26. $f(x) = \ln(1 + x^3)$.

27.* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

Výsledky

1. $D_f = [0, 1) \cup (1, \infty)$ 2. $D_f = (-1, 1)$ 3. $D_f = (-1, \infty)$
4. $D_f = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-1, \infty)$ 5. $D_f = (2, 3)$
6. $D_f = \bigcup_{k \in Z}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ 7. $D_f = R$, $H_f = (0, 1]$
8. $D_f = [-1, 1]$, $H_f = [0, 1]$ 8.1 $D_f = (-1, 1)$, $H_f = [1, \infty)$
9. $D_f = R \setminus 0$, $H_f = (0, \infty)$
10. $D_f = R$, $H_f = [-2, 2]$ 11. $D_f = R$, $H_f = [2, \infty)$
12. párna 13. nepárna 14. nepárna 15. párna
16. párna 17. ani jedna z možností
18. $D_f = R \setminus \{-2\}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+3}{1-x}$, $D_{f^{-1}} = H_f = R \setminus \{1\}$
19. $D_f = R \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+7}{3-2x}$, $D_{f^{-1}} = H_f = R \setminus \{\frac{3}{2}\}$
20. $D_f = R \setminus \{0\}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, $D_{f^{-1}} = H_f = (0, 1) \cup (1, \infty)$
21. $D_f = [-1, \infty$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\ln^2 x - 1}$, $D_{f^{-1}} = H_f = [1, \infty)$
22. $D_f = [\frac{1}{2}, \infty)$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1+4x}}{2}$, $D_{f^{-1}} = H_f = [-\frac{1}{4}, \infty)$
23. $D_f = [-\infty, \frac{1}{2})$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1+4x}}{2}$, $D_{f^{-1}} = H_f = [-\frac{1}{4}, \infty)$
24. $D_f = (-\infty, 0]$, $f^{-1}(x) = \ln 1 - x^2$, $D_{f^{-1}} = H_f = [0, 1)$
25. $D_f = R$, $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $D_{f^{-1}} = H_f = R$,
26. $D_f = (-1, \infty)$, $f^{-1}(x) = (e^x - 1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e^x - 1}$, $D_{f^{-1}} = H_f = R$

27. $D_f = ([0, 1) \cup (1, \infty)$, $\quad f^{-1}(x) = ?$ $\quad D_{f^{-1}} = H_f = R$