Prednáška 14.

Kritériá konvergencie, pokračovanie

3. Cauchyho kritérium.

Toto kritérium, ktorého autorom je francúzsky matematik Augustin Louis Cauchy (1789-1857), je založené na porovnaní neznámeho radu s radom geometrickým.

Ak totiž v rade

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

s nezápornými sčítancami a_n, považujeme a_n za n-tú mocninu kvocientu, tak

$$q = \sqrt[n]{a_n}.$$

Samozrejme, ak rad nie je geometrický tak pre každé n vznikne iný kvocient q_n. Rozhodnutie o konvergencii robíme podľa kvocientu limitného.

Veta (Cauchy). *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je nekonečný číselný rad s nezápornými členmi.*

Nech existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

Potom

- *, ak* $l > 1$ *rad diverguje do* ∞*,*
- *, ak* $0 < l < 1$ *rad konverguje.*

Všimnime si, že veta nehovorí nič o prípade $l = 1$.

V takom prípade pomocou Cauchyho kritéria nevieme rozhodnúť o konvergencii radu.

Príklad 1. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{2n-1}\right)^n$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+5}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Podľa Cauchyho kritéria je rad konvergentný.

Príklad 2. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{2n}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^2 = \frac{4}{9} < 1.$$

Rad je konvergentný.

Príklad 3. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Rad je divergentný.

Príklad 4. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Rad je konvergentný.

Príklad 5. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+4n-2}{2^n}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie. Pri priamom použití Cauchyho kritéria by sme počítali limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3+4n-2}{2^n}}$$

Pretože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3+4n-2}{2^n}}{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+4n-2}{n^3} = 1,$$

použijeme Cauchyho kritérium pre rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n},$$

ktorý má rovnaký charakter konvergencie, ako pôvodný rad zo zadania príkladu.
Pretože

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

je rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

konvergentný a teda aj rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 4n - 2}{2^n}$$

je konvergentný.

3. D'Alembertovo kritérium.

Ďalší z francúzskych matematických velikánov Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783), vytvoril kritérium, založené na porovnaní neznámeho radu s radom geometrickým.

Jeho metóda je založená na tom, že v geometrickej postupnosti je kvocient pomerom nasledujúceho člena ku predchádzajúcemu.

Kritérium je založené na limitnej hodnote tohoto pomeru.

Veta (D'Alembert). *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je nekonečný číselný rad s nezápornými členmi.*

Nech existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Potom

- *ak* $l > 1$, *rad diverguje do* ∞,
- *ak* $0 < l < 1$, *rad konverguje.*

Príklad 6. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n \cdot 2}{(n+1)\cdot n!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Rad je konvergentný.

Príklad 7. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{((n+1)^2)}}}{\frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2(n!)^2}{2^{(n^2+2n+1)}}}{\frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}=0<1.$$

Rad je konvergentný.

Príklad 8. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)(n+1)!}{(2n)!}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!(n+2)!}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)(n+1)!}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)\,n!(n+2)\,(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}}{\frac{(n!)(n+1)!}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4}<1.$$

Rad je konvergentný.

Na záver tejto časti poznamenajme, že Cauchyho a d'Alembertovo kritérium sú rovnako silné.

Rozdiel v nich je len v zložitosti výpočtu. Zatiaľ čo Cauchyho kritérium, zvané tiež odmocninové, je vhodné pre rady s n-tými mocninami, d'Alembertovo (podielové) kritérium je vhodné pre rady s faktoriálmi.

Ale nemôže sa stať, že v príklade, kde je bezmocné jedno z nich, rozhodne druhé. Presnejšie platí veta.

Veta. *Nech* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ *je nekonečný číselný rad s nezápornými členmi.*

Nech existuje limita

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l_C$$

a limita

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l_A.$$

Potom

$$l_C=l_A.$$

4. Rady so striedavými znamienkami, Leibnitzovo kritérium.

V predošlých častiach sme sa venovali len radom s nezápornými členmi. Teraz prejdeme k radom, v ktorých sú sčítance striedavo kladné a záporné.

Definícia. Nech $a_n \geq 0$. Rad

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, a_n$$

nazývame rad so stridavými znamienkami.

Tu sme uprednostnili názornosť pred všeobecnosťou, rovnako rad, ktorý nezačína od indexu 0, ale od $n_0 \in N$, budeme volať rad so striedavými znamienkami.

Príklad 9. Rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)n + 1\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

je rad so striedavými znamienkami.

Venujme sa otázke jeho konvergencie.
Počítajme párne a nepárne čiastočné súčty. Pre párne súčty S_{2N} platí

$$S_{2N} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N}.$$

Pretože dva po sebe nasledujúce zlomky $\frac{1}{2n-1}$ a $-\frac{1}{2n}$ majú pre ľubovoľné n kladný súčet ($\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} > 0$), platia nerovnosti

$$\frac{1}{2} = S_2 < S_4 < \cdots < S_{2N} \ldots .$$

Pre nepárne súčty S_{2N-1} platí

$$S_{2N-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2N-2} + \frac{1}{2N-1}.$$

Teraz vynecháme prvý člen radu 1 a spárujeme sčítance začnúc od $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Dva po sebe nasledujúce zlomky $-\frac{1}{2n-2}$ a $\frac{1}{2n-1}$ majú pre ľubovoľné n záporný súčet ($-\frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} < 0$). Preto je

$$\cdots < S_{2N-1} < S_{2N-3} < \cdots < s_3 < S_1 = 1.$$

Súčasne je ale

$$S_{2N} < S_{2N-1}.$$

Teda

$$\frac{1}{2} = S_2 < S_4 < \cdots < S_{2N} \cdots < \ldots S_{2N-1} < S_{2N-3} < \cdots < s_3 < S_1 = 1.$$

Preto

$$S_{par} = \lim_{N\to\infty} S_{2N} \leq \lim_{N\to\infty} S_{2N-1} = S_{nep}.$$

Navyše

$$S_{par} - S_{nep} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} = 0.$$

Teda S_{par} a S_{nep} majú rovnakú limitu a aj každý čiatočný súčet má tú istú konečnú limitu menšiu ako 1. (A väčšiu ako $\frac{1}{2}$).

Rad z nášho príkladu je konvergentný.

Uvedomme si, že ak by sme zmenili záporné sčítance za rovnako veľké kladné, tak by sme dostali harmonický rad, ktorý ale diverguje.

Postup z príkladu sa dá skopírovať pre akýkoľvek rad so striedavými znamienkami, ktorý spĺňa Leibnitzove podmienky uvedené vo vete nižšie.

Veta (Leibnitz). *Nech* $a_n \geq 0$. *Ak platí*
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
- *od istého* n_0 *je* $a_n \geq a_{n+1}$,

tak rad so striedavými znamienkami $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, a_n$ *konverguje.*

Príklad 10. Zistime, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

konverguje alebo nie.

Riešenie.

Prvá podmienka kritéria

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

je splnená.

Podobne aj druhá podmienka

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Preto rad konverguje.