Prednáška 11.

Postupnosti a nekonečné rady

Predchádzajúcou prednáškou sme skončili prvú veľkú kapitolu, diferenciálny počet.

V tejto časti si povieme niečo o konečných a hlavne nekonečných postupnostiach reálnych čísel.

Hlavným cieľom kapitoly je naučiť sa, ako a kedy ich vieme sčítať.

Postupnosti

Začnime príkladom postupnosti

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ ?,\ \ldots$$

To je úloha, ktorá sa vyskytuje v ťažšej alebo ľahšej verzii aj v inteligenčných testoch a otázka väčšinou znie: Aké číslo je na mieste otáznika?

Po istej úvahe odpovieme, že 64.

Ak sa ale opýtame, ako sme na to prišli, dostaneme dva druhy odpovede. Jedna z nich je: Každé číslo je dvojnásobok predošlého.

Druhý typ odpovede je: Každé číslo je mocnina dvojky, a to taká, na akom mieste sa číslo nachádza (ak začíname nultým).

Táto odpoveď nám hovorí, že postupnosť je vlastne zobrazenie, ktoré poradovému číslu n priradí (reálnu) hodnotu a_n.

V našom príklade

$$6 \to 2^6,$$

$$n \to 2^n.$$

Postupnosť je teda funkcia na prirodzených číslach. Označme $N_0 = N \cup \{0\}$.

Definícia. Zobrazenie $f : N_0 \to R$ nazývame nekonečná číselná postupnosť.

Značíme

$$f(n) = a_n.$$

Číslo a_n voláme n-tý člen postupnosti.

Postupnosť nemusí začínať nultým členom, môže začať ľubovoľným n.

Pre postupnosť používame tiež označenie

$$\{a_n\}_{n=0.}^{\infty}$$

Postupnosť z motivačnej ukážky môžeme teda zapísať ako

$$f(n) = 2^n \text{ alebo tiež } \{2^n\}_{n=0.}^{\infty}$$

Vráťme sa k prvému typu odpovede.

V ňom je skrytý pojem rekurencia (rekurzia), čo súvisí s informatickým pojmom cyklus.

Predpis pre generovanie postupnosti z úvodu kapitoly je

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n,$$

a ešte potrebujeme poznať začiatok

$$a_0 = 1.$$

Dvojicu

$$a_{n+1} = g(a_n),$$

$$a_0 = c,$$

v ktorej je funkciou g dané, ako sa z n-tého člena postupnosti vypočíta nasledujúci, nazývame rekurencia.

Príklad 1. Z rekurentného zápisu

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

$$a_0 = c,$$

nájdite postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Riešenie.
Počítajme postupne $a_0 = c$, $a_1 = c + d$, $a_2 = a_1 + d = c + 2d$, a $a_n = a_{n-1} + d = c + nd$.
(Presný dôkaz sa urobí matematickou indukciou.)
Teda

$$f(n) = c + nd.$$

Príklad 2. Z rekurentného zápisu

$$a_{n+1} = q \cdot a_n,$$

$$a_0 = c,$$

nájdite postupnosť $\{a_n\}_{n_0}^{\infty}$.

Riešenie.
Počítajme postupne $a_0 = c$, $a_1 = cq$, $a_2 = a_1 q = cq^2$, a $a_n = a_{n-1} q = cq^n$.
Teda

$$f(n) = cq^n.$$

Postupnosť z príkladu 1 voláme aritmetická a číslo d voláme diferencia.
Postupnosť z príkladu 2 voláme geometrická a číslo q voláme kvocient.
Budeme sa teraz venovať otázke, či sa pre n idúce do nekonečna hodnoty postupnosti a_n blížia k nejakému číslu alebo nie.

Definícia. Postupnosť $f : N_0 \to R$, $f(n) = a_n$ nazývame konvergentná, ak existuje konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Inak ju nazývame divergentná.

Poznámka. Divergentná postupnosť môže mať limitu $L = \infty(-\infty)$, vtedy hovoríme, že postupnosť diverguje do ∞ $(-\infty)$, alebo nemá žiadnu limitu.

Príklad 3. Zistite, či je postupnosť $f(n) = \frac{1}{n}$ konvergentná alebo divergentná.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Preto je postupnosť $f(n) = \frac{1}{n}$ konvergentná.

Príklad 4. Zistite, či je postupnosť $f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergentná alebo divergentná.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Preto je postupnosť $f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergentná.

Príklad 5. Zistite, či je postupnosť $f(n) = 2^n$ konvergentná alebo divergentná.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$$

Preto je postupnosť $f(n) = 2^n$ divergentná a diverguje do ∞.

Príklad 6. Zistite, či je postupnosť $f(n) = (-1)^n$ konvergentná alebo divergentná.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \quad \text{neexistuje.}$$

Preto je postupnosť $f(n) = (-1)^n$ divergentná.

Príklad 7. Zistite, či je postupnosť $f(n) = \sqrt[n]{n}$ konvergentná alebo divergentná.

Tu použijeme vetu o limite zúženia preformulovanú na prípad postupností.

Tvrdenie. *Nech $f : R_0^+ \to R$ je funkcia, pomocou ktorej je vytvorená postupnosť $f(n) : N_0 \to R$.*

Potom ak existuje limita

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L,$$

tak aj

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = L.$$

Riešenie príkladu 7.

Použijeme funkciu $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Preto aj

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1,$$

a postupnosť $f(n) = \sqrt[n]{n}$ je konvergentná.

Konečné rady

Postupnosť

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{N-1}$$

nazývame konečná postupnosť. (Počet jej členov je N.)

Výraz

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ \ldots\ + a_{N-1}$$

nazývame konečný rad. Značíme ho

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n$$

Konečný aritmetický rad.

Konečný aritmetický rad je súčet členov konečnej aritmetickej postupnosti

$$c,\ c+d,\ c+2d, \ldots,\ c+(N-1)d.$$

Označme ho ako

$$S_N = c + c + d + c + 2d + \cdots + c + (N-1)d.$$

Po troche počítania dostaneme

$$S_N = Nc + \frac{1}{2}N(N-1)d.$$

Alebo tiež

$$S_N = \frac{1}{2}N(c + c + (N-1)d) = \frac{1}{2}(a_0 + a_{N-1}).$$

Príklad 8.

$$1 + 2 + 3 + \ \ldots\ + N = \sum_{n=1}^{N} n = \frac{1}{2}N(1+N).$$

Príklad 9.

$$1+3+5+\ \dots\ +(2N-1)=\sum_{n=1}^{N}(2n-1)=\frac{1}{2}N(1+2N-1)=N^2.$$

Konečný geometrický rad.

Konečný geometrický rad je súčet členov konečnej geometrickej postupnosti

$$c,\ cq,\ cq^2,\ \dots,\ cq^{N-1}.$$

Označme ho ako

$$S_N=c+cq+cq^2+\ \dots+cq^{N-1}.$$

Teraz

$$S_N=c(1+q+q^2+\ \dots\ +q^{N-1})=c\sum_{n=0}^{N-1}q^n.$$

Rozlíšime dve možnosti.
Ak $q=1$, tak

$$S_N=cN.$$

Ak $q\neq 1$, tak

$$S_N=c\,\frac{1-q^N}{1-q}.$$

Príklad 10. Pri pravidelnom vklade 100 eur po dobu 10 rokov a garantovanom úroku 2% bude na konci obdobia uložená suma

$$S_{11}=100\frac{1-1.02^{11}}{1-1.02}\doteq 1217.$$

Kvôli priamemu použitiu formulky sme na konci posledného roku urobili ešte jeden (jedenásty) vklad.

Pretože v praxi nikto neurobí 11-ty vklad a hneď na to výber, výsledok sporenia je zaokrúhlene 1117 eur.