

PREDNÁŠKA 10.

L'HOSPITALOVO PRAVIDLO

Francúzsky šľachtic, markíz de l'Hospital bol okrem iného aj matematikom a autorom oceňovanej učebnice analýzy. Vyšla na prelome 17. a 18. storočia a hovorí sa o nej, ako o prvej učebnici diferenciálneho počtu.

V tejto knihe sa objavila aj veta, ktorá hovorí, ako počítať niektoré limity použitím derivácií.

Veta (l'Hospitalovo pravidlo). *Nech $f : A \rightarrow R$, $g : A \rightarrow R$ sú diferencovateľné funkcie a nech x_0 je hromadný bod A . Nech existuje také okolie $O_\delta^\circ(x_0)$, že $g(x) \neq 0$ a $g'(x) \neq 0$ pre $x \in O_\delta^\circ(x_0) \cap A$.*

Nech buď

a. *existujú limity $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,*

alebo

b. *existujú limity $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$.*

Potom ak $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, tak $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Povedané hovorovou rečou, ak počítáš limitu podielu dvoch funkcií, pričom obe sa blížia buď k nule, alebo obe do nekonečna, môžeš podiel funkcií nahradiť podielom smerníc ich dotyčníc. Ak limita existuje, tak je rovnaká, ako limita pôvodného podielu.

Použijeme l'Hospitalovo pravidlo v príkladoch.

Príklad 1. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Riešenie.

Výsledok už dopredu poznáme, chceme ale vidieť postup pomocou l'Hospitalovho pravidla.

Pre menovateľ je $g(x) = x \neq 0$ aj $g'(x) = 1 \neq 0$ na okolí $O_\delta^\circ(0)$.

Pretože

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \text{aj} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

je splnený predpoklad a.

Počítajme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Pretože táto limita existuje, tak aj

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

V nasledujúcich príkladoch použijeme zaužívaný zrýchlený zápis.

Príklad 2. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Riešenie.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

Pri tomto zápise je prvé rovnítko „podmienené“, platí len ak sú splnené predpoklady vety a druhá limita existuje.

(Tu môžeme tiež poznamenať, že ak limita podielu derivácií neexistuje, tak o limite pôvodného podielu nevieme povedať nič.)

Príklad 3. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}.$$

Riešenie.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Nasledujúci príklad ukazuje, že l'Hospitalovo pravidlo sa dá použiť opakovane.

Príklad 4. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3 - 3x + 1}.$$

Riešenie.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6} = \infty.$$

Vyriešený príklad okrem opakovaného použitia l'Hospitalovho pravidla má aj teoretické zošeobecnenie. Vidíme z neho, že exponenciálna funkcia rastie do nekonečna rýchlejšie ako akýkoľvek polynóm.

Príklad 5. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x.$$

Riešenie.

V zadaní nie je podiel, preto treba najprv upraviť súčin na podiel, a až potom počítať limitu.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -x = 0.$$

Nevadí, že prirodzený logaritmus má v nule limitu sprava rovnú $-\infty$, pre použitie vety môžeme považovať znamienko „-“ za vyňaté pred limitu.

Príklad 6. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

Riešenie.

Aj v tomto prípade potrebujeme najprv limitovaný rozdiel upraviť.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.$$

Uvedomme si, že v priebehu výpočtu treba v každom kroku kontrolovať, či sú splnené predpoklady l'Hospitalovej vety. V poslednom podieli už je limita menovateľa rovná 2, preto sme už l'Hospitalovo pravidlo nemohli (a ani nepotrebovali) použiť.

Príklad 7. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{1 - \cos x} \right).$$

Riešenie.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{1 - \cos x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x - x^2}{x^2(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 2x}{2x(1 - \cos x) + x^2 \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2}{2(1 - \cos x) + 4x \sin x + x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x}{6 \sin x + 6x \cos x - x^2 \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x}{12 \cos x - 8x \sin x - x^2 \cos x} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

ASYMPTOTY V NEKONEČNE

Budeme sa zaoberať funkciou, ktorá je definovaná na niektorom neohraničenom intervale. Kvôli konkrétnosti sa venujeme intervalu (a, ∞) . Situácia v okolí $-\infty$ je analogická.

Pýtame sa na správanie funkcie f , ak jej premenná x rastie do ∞ . Konkrétne sa budeme pýtať, či existuje taká priamka $y = kx + q$, že funkcia f sa pre veľké hodnoty x chová približne ako táto priamka. Je to akási „dotyčnica“ ku grafu funkcie f v nekonečne.

Ak taká priamka existuje, nazývame ju asymptota v ∞ .

Ako príklad môžeme uviesť funkciu $\arctg(x)$, ktorá sa v pre x idúce do nekonečna blíži ku konštante $\frac{\pi}{2}$, a teda jej asymptota v ∞ je priamka $y = 0x + \frac{\pi}{2}$.

Skúsme trochu spresniť naše predstavy o asymptote. Ako prvé očakávame, že funkcia f a jej asymptota majú približne rovnaký smer. Teda chceme aby

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{kx + q} = 1.$$

Po úprave

$$1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{kx+q}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{k}.$$

Teda

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Ďalej chceme, aby sa rozdiel medzi grafom funkcie a asymptotou znižoval k nule,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (kx + q) = 0.$$

Teda

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - kx.$$

Definícia. Nech $f : (a, \infty) \rightarrow R$ je funkcia definovaná na intervale (a, ∞) .

Ak existujú konečné limity

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x},$$

a

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - kx,$$

tak priamku $y = kx + q$ nazývame asymptota funkcie f v ∞ .

Asymptotu v $-\infty$ definujeme analogicky.

Príklad 8. Nájdime asymptotu funkcie

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$$

v nekonečne.

Riešenie.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 3}{x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 + x} = 1,$$

a teda $k = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x + 1} - 1x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3 - x^2 - x}{x + 1} = -1,$$

a teda $q = -1$.

Priamka $y = x - 1$ je asymptota funkcie f v nekonečne.

Príklad 9. Nájdime asymptoty funkcie

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$$

v $\pm\infty$.

Riešenie.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{xe^x}{e^x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 1,$$

a teda $k = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^x}{e^x + 1} - 1x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^x - xe^x - x}{e^x + 1} = 0,$$

a teda $q = 0$.

Priamka $y = x$ je asymptota funkcie f v nekonečne.

V $-\infty$ je výpočet podobný.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{xe^x}{e^x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0,$$

a teda $k = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x + 1} - 0x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0,$$

a teda $q = 0$.

Priamka $y = 0$ je asymptota funkcie f v $-\infty$.