Prednáška 5.

Diferenciálny počet

Derivácia funkcie

Motiváciou k pojmu derivácia je snaha charakterizovať rýchlosť rastu, prípadne klesania funkcie f.

Geometrickým vyjadrením rýchlosti zmeny je pojem dotyčnice ku grafu G_f funkcie f.

Pripomeňme, že rovnica priamky, ktorá prechádza bodom $[x_0, y_0]$ je

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Preto priamka, ktorá prechádza bodom $[x_0, f(x_0)]$ na grafe funkcie, má rovnicu

$$y - f(x_0) = k(x - x_0).$$

Pred nami je otázka, ako stanoviť smernicu k tak, aby priamka vystihovala čo najlepšie rast funkcie f v bode $[x_0, f(x_0)]$ (aby bola dotyčnicou). A tiež otázka, kedy sa také k dá nájsť.

Pomôžeme si pojmom sečnice. Vezmime dva rôzne body na grafe funkcie f, jeden z nich je $[x_0, f(x_0)]$ a druhý $[x, f(x)]$. (Pritom predpokladajme, že funkcia f je definovaná v každom bode medzi x_0 a x.)

Rovnica priamky prechádzajúcej týmito dvoma bodmi má smernicu

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Očakávame, že takáto priamka vystihuje chovanie funkcie v bode x_0 tým lepšie, čím bližšie je bod x k bodu x_0.

Za najlepšiu smernicu budeme považovať limitu

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ak takáto limita existuje a je konečná, nazveme ju deriváciou funkcie f v bode x_0.

Definícia. Nech $f : A \to R$, a nech $x_0 \in A$ je hromadný bod množiny A. Hovoríme, že funkcia f je v bode x_0 diferencovateľná, ak existuje vlastná limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k.$$

Číslo k nazývame derivácia funkcie f v bode x_0. Značíme $f'(x_0) = k$.

Definícia. Ak je funkcia f diferencovateľná v každom bode intervalu $I \subset A$, tak hovoríme, že je diferencovateľná na intervale I. Funkciu $f' : I \to R$ nazývame derivácia funkcie f na intervale I.

Ľahko vieme nahliadnuť, že na to, aby funkcia mala v bode x_0 deriváciu, musí byť v tomto bode spojitá.

Veta. *Ak je funkcia diferencovateľná v bode x_0, tak je aj spojitá v bode x_0.*

Tvrdenie vety neplatí naopak. Spojitá funkcia ešte nemusí mať deriváciu (dotyčnicu v bode). Najjednoduchší príklad je tento:

Príklad. Funkcia $f(x) = |x|$ je spojitá v bode 0 (aj v ostatných bodoch R, ale sústredíme sa na nulu), ale nemá v bode 0 deriváciu, lebo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1,$$

a

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1.$$

Preto

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0}$$

neexistuje, a teda funkcia f nemá v bode 0 deriváciu.

(Skúste si nakresliťobrázok.)

Skúsme teraz vypočítať derivácie jednoduchých funkcií priamo pomocou definície.

Príklad 1. Konštantná funkcia $f(x) = c$ má v každom bode x_0 deriváciu, a to

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Príklad 2. Lineárna funkcia $f(x) = x$ má v každom bode x_0 deriváciu, a to

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Príklad 3. Funkcia $f(x) = \sin x$ má tiež v každom bode x_0 deriváciu. Vypočítajme ju.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin(x_0)}{x - x_0}$$

Použijeme rovnosť

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha - \beta}{2})\cos(\frac{\alpha + \beta}{2}).$$

Teraz

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})\cos(\frac{x+x_0}{2})}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} \lim_{x\to x_0} \cos(\frac{x + x_0}{2}) = \cos x_0.$$

Teda

$$f'(x_0) = \cos x_0.$$

Pretože sme deriváciu vypočítali v ľubovoľnom bode $x_0 \in R$, je funkcia

$$f'(x) = \cos x$$

definovaná na $D_{f'} = R$, funkciou derivácie pôvodnej funkcie $\sin x$.

Sériou takýchto príkladov vieme vytvoriť zoznam elementárnych funkcií a ich derivácií. Tu je:

Derivácie niektorých elementárnych funkcií.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\sin(x)$	$\cos(x)$
x^n	$n\ x^{n-1}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x	$\mathrm{tg}\,(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathrm{cotg}\,(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$

Podobne, ako pri výpočte limít, aj pri výpočte derivácií, (veď sú to v podstate limity) je počítanie pomocou definície zdĺhavé, a tak uvedieme jednoduché pravidlá výpočtu.

Veta (o výpočte). *Nech $f : I \to R$, $g : I \to R$ sú diferencovateľné funkcie. Potom*

$(f+g)' = f' + g'$,
$(cf)' = c \cdot f'$, *(c je konštanta)*
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$,
ak naviac $g \neq 0$, *tak* $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Vetu sme uviedli pre funkcie na I, v rovnakej podobe platí aj pre derivácie v bode x_0.

Teraz už vieme efektívne počítať derivácie väčšieho počtu funkcií.

Príklad 4. Funkcia $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 7$ má deriváciu

$$f'(x) = 3x^2 + 10x - 3.$$

Príklad 5. Funkcia $f(x) = x \sin x$ má deriváciu

$$f'(x) = 1 \sin x + x \cos x.$$

Príklad 6. Funkcia $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ má deriváciu

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - (x-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Príklad 7. Funkcia $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ má deriváciu

$$f'(x) = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Príklad 8. Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ má deriváciu

$$f'(x) = \frac{\cos x\, \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(Týmto výpočtom sme overili predposledný vzorec z tabuľky.)

Pri derivovaní zloženej funkcie nám pomôže táto veta.

Veta (o derivácii zloženej funkcie). *Nech $f : I \to J$, $g : J \to R$ sú diferencovateľné funkcie na svojich definičných oboroch.*

Potom zložená funkcia je diferencovateľná na I a platí

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Príklad 9. Funkcia $f(x) = \sin(x^2 - x + 3)$ má deriváciu

$$f'(x) = \cos(x^2 - x + 3) \cdot (2x - 1).$$

Príklad 10. Funkcia $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ má deriváciu

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Príklad 11. Funkcia $f(x) = \sqrt{x^3+1} = (x^3+1)^{\frac{1}{2}}$ má deriváciu

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 = \frac{3}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}.$$

Príklad 11. Funkcia $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ má deriváciu

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}})}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$