Prednáška 9.

Konvexnosť a konkávnosť

Znamienko druhej derivácie nám dáva informáciu o tvare funkcie nielen v stacionárnom bode.

Ak je druhá derivácia na intervale I kladná, tak prvá derivácia rastie. Geometricky to znamená, že smernica dotyčnice je stále väčšia a funkcia sa teda postupne prehýba smerom nahor. (Príkladom je funkcia x^2.)

Analogicky, ak je druhá derivácia na intervale I záporná, tak sa funkcia prehýba smerom nadol. (Príkladom je funkcia $-x^2$.)

Na definíciu „priehybu" ale nepotrebujeme hovoriť o derivácii.

Definícia. Nech $f : I \to R$ je funkcia definovaná na intervale I.

Hovoríme, že funkcia f je na intervale I:

- konvexná, ak $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$ platí
$$x_1 < x_2 < x_3 \;\Rightarrow\; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$
- rýdzo konvexná, ak $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$ platí
$$x_1 < x_2 < x_3 \;\Rightarrow\; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$
- konkávna, ak $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$ platí
$$x_1 < x_2 < x_3 \;\Rightarrow\; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$
- rýdzo konkávna, ak $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$ platí
$$x_1 < x_2 < x_3 \;\Rightarrow\; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Definícia je trochu ťažkopádna, existuje aj iná možnosť zavedenia pojmu konvexnosti a konkávnosti.

Zlomky v definícii sú smernice sečníc a nerovnosti hovoria, že pri konvexnosti funkcie smernice rastú, a pri konkávnosti klesajú.

V limitnom prechode dostaneme zo zlomkov derivácie a zo sečníc dotyčnice. Preto:

Veta (konvexnosť a 1. derivácia). *Nech $f : I \to R$ je funkcia diferencovateľná na intervale I.*

Potom:

- *funkcia f je konvexná na I $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ je na I neklesajúca,*
- *funkcia f je konkávna na I $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ je na I nerastúca,*
- *ak je $f'(x)$ na I rastúca, tak f je rýdzo konvexná na I,*
- *ak je $f'(x)$ na I klesajúca, tak f je rýdzo konkávna na I.*

Rast alebo klesanie funkcie f' vieme popísať pomocou druhej derivácie. Preto:

Veta (konvexnosť a 2. derivácia). *Nech $f : I \to R$ je funkcia dvakrát diferencovateľná na intervale I.*

Potom:

- *ak je $f''(x) > 0$ na I, tak f je rýdzo konvexná na I,*
- *ak je $f''(x) < 0$ na I, tak f je rýdzo konkávna na I.*

Príklad 1. Nájdime intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie

$$f(x) = e^x.$$

Riešenie.

Definičný obor funkcie f je $D_f = R$.

Derivácia aj druhá derivácia funkcie f je

$$f'(x) = f''(x) = e^x.$$

Pretože $e^x > 0$ na celom R, je funkcia f (rýdzo) konvexná na R.

Príklad 2. Nájdime intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Riešenie.

Definičný obor funkcie f je $D_f = R_0^+$.

Vypočítajme jej druhú deriváciu.

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}.$$

f'' nie je definovaná v bode 0, a na intervale $(0, \infty)$ je $-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} < 0$, preto je funkcia f (rýdzo) konkávna na R^+. Pretože je f spojitá v bode 0, môžeme konkávnosť rozšíriť aj do krajného bodu 0.

Príklad 3. Nájdime intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

Riešenie.

Definičný obor funkcie f je $D_f = R$.

Derivácia

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Druhá derivácia je

$$f''(x) = 6x.$$

Druhá derivácia je nulová len pre $x_0 = 0$.

Na intervale $(-\infty, 0)$ je $f''(x) < 0$, a na intervale $(0, \infty)$ je $f''(x) > 0$.

Preto je f konkávna na intervale $(-\infty, 0)$ a konvexná na intervale $(0, \infty)$. (Oba intervaly sa dajú vďaka spojitosti rozšíriť na intervaly uzavreté v nule.

V poslednom príklade sa v bode 0 zmenil typ priehybu funkcie, konkávnosť sa zmenila na konvexnosť.

Takéto body budeme volať inflexné.

Definícia. Nech $f : I \to R$ je funkcia dvakrát diferencovateľná na intervale I.

Bod x_0, v ktorom je $f''(x_0) = 0$ a existujú čísla $a < x_0 < b$ také, že f'' má na intervaloch (a, x_0) a (x_0, b) rôzne znamienka, nazývame inflexný bod funkcie f.

Poznamenajme, že na to, aby bol bod inflexný, nestačí, aby $f''(0) = 0$, musí sa pri prechode bodom x_0 zmeniť znamienko druhej derivácie.

Príklad 4. Nájdime intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexné body funkcie

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x^2}.$$

Riešenie.

Definičný obor funkcie f je $D_f = R$.

Derivácia

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} + (x^2 + 1)e^{-x^2}(-2x) = -2x^3 e^{-x^2}.$$

Druhá derivácia je

$$f''(x) = -6x^2 e^{-x^2} + 4x^4 e^{-x^2} = x^2(4x^2 - 6)e^{-x^2}.$$

Druhá derivácia je nulová pre $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_2 = 0$ a $x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Na jednotlivých intervaloch dostaneme: f'' je kladná na $-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ a na $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$ a záporná na $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$ a $(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$.

Preto body $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ a $x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ sú inflexné body, ale $x_2 = 0$ nie.

Funkcia f je konvexná na intervaloch $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}]$ a $[\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$, konkávna na intervale $[-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}]$.

(Intervaly sme rozšírili pomocou spojitosti a rozšírením do nuly vznikol jeden interval konkávnosti z dvoch pôvodných.)