Prednáška 8.

Diferencovateľná funkcia na uzavretom intervale

V tejto časti uvedieme dve vlastnosti funkcií, ktoré majú deriváciu na uzavretom a ohraničenom intervale $I = [a, b]$.

Obe spolu súvisia, sú pomenované po svojich autoroch a v oboch prípadoch je užitočná fyzikálna predstava o derivácii funkcie ako okamžitej rýchlosti.

Veta Rolleho. *Nech funkcia $f : I \to R$ je diferencovateľná na celom intervale $I = [a, b]$. Nech $f(a) = f(b)$.*

Potom existuje taký bod $c \in (a, b)$, že

$$f'(c) = 0.$$

Voľne povedané, ak má funkcia na oboch krajoch rovnakú hodnotu, a je diferencovateľná, tak má v niektorom vnútornom bode vodorovnú dotyčnicu.

(Tento bod je súčasne bodom lokálneho extrému.)

Na Rolleho vetu sa môžeme pozrieť aj tak, že premennú x interpretujeme ako čas a funkčné hodnoty $f(x)$ ako polohu.

Veta teda hovorí: Ak tvoj pohyb skončil na tom istom mieste ako začal, tak buď si celý čas stál (konštantná funkcia), alebo si v nejakom okamihu $x = c$ zastal (nulová derivácia) a otočil sa. (Uvažujeme o pohybe v jednorozmernom priestore, napr. po rovnej ceste.)

Veta Lagrangeova. *Nech funkcia $f : I \to R$ je diferencovateľná na celom intervale $I = [a, b]$.*

Potom existuje taký bod $c \in (a, b)$, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Lagrangeova veta trochu menej predpokladá a aj tvrdí trochu menej ako Rolleho veta.

Dá sa ale ukázať, že Lagrangeova veta je v skutočnosti Rolleho veta pre trochu upravenú funkciu g

$$g(x) = f(x) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Naozaj $g(b) = f(b) - (b - a)\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f(a) = g(a)$.

Preto existuje bod $c \in (a, b)$ v ktorom je

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

a teda

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Z pohľadu pohybu interpretujeme deriváciu ako okamžitú rýchlosť a zlomok $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ako priemernú rýchlosť za čas $b - a$ na vzdialenosti $f(b) - f(a)$.

Veta teraz hovorí, že počas pohybu z bodu $f(a)$ do bodu $f(b)$ si sa v niektorom okamihu c musel pohybovať presne priemernou rýchlosťou.

S Lagrangeovou vetou sa ešte stretneme v kapitole o určitom integráli.

Derivácie vyšších rádov

Ak sme v predchádzajúcej časti interpretovali deriváciu ako rýchlosť (zmenu polohy v čase), tak deriváciu derivácie môžeme interpretovať ako zmenu rýchlosti v čase.

Geometrickú interpretáciu si necháme na neskôr.

Predpokladajme, že máme funkciu f, ktorá je diferencovateľná na intervale I. Jej deriváciu $f'(x)$ označme ako $g(x)$, $g : I \to R$. Ak je aj funkcia g diferencovateľná na intervale I, tak jej deriváciu $g'(x)$ nazveme druhá derivácia funkcie f na intervale I a označíme f''.

Príklad 1. Majme funkciu

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

Táto má deriváciu na celom svojom definičnom obore $D_f = R$, a

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Pretože f' je tiež diferencovateľná funkcia je na celom R

$$f''(x) = 6x.$$

Definíciu naformulujeme trochu všeobecnejšie.

Definícia. Nech $f : I \to R$ je funkcia definovaná, na intervale I.

Označme $f^{[0]}(x) = f(x)$ (indexom hore budeme číslovať počet derivácií).

Nech $k \in N$ je prirodzené číslo.

Ak je funkcia $f^{[k-1]} : I \to R$ diferencovateľná na intervale I, tak jej deriváciu $\left(f^{[k-1]}\right)' : I \to R$ nazývame k-ta derivácia funkcie f a značíme $f^{[k]} : I \to R$.

Poznamenajme, že pri nižších deriváciách sa ich počet označuje často počtom čiarok namiesto čísla k.

Mohli sme tiež postupovať tak, ako v prípade prvej derivácie a zaviesť vyššie derivácie najprv v bode x_0 a až potom na intervale I.

Príklad 2. Funkcia

$$f(x) = x^5$$

je diferencovateľná na celom R a jej derivácie sú

$$f'(x) = 5x^4,$$

$$f''(x) = 4 \cdot 5x^3 = 20x^3,$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 4 \cdot 5x^2 = 60x^2,$$

$$f''''(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5x = 120x,$$

$$f'''''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120,$$

$$f^{[k]}(x) = 0, \text{ pre } k > 5.$$

Príklad 3. Funkcia
$$f(x) = e^x$$
je diferencovateľná na celom R a jej derivácie sú
$$f^{[k]}(x) = e^x, \text{ pre } k \in N.$$

Príklad 4. Funkcia
$$f(x) = \sin x$$
je diferencovateľná na celom R a jej derivácie sú
$$f'(x) = \cos x,$$
$$f''(x) = -\sin x,$$
$$f'''(x) = -\cos x,$$
$$f''''(x) = f(x) = \sin x,$$
$$f^{[k]}(x) = f^{[k-4]}(x), \text{ pre } k \geq 4.$$
(A vlastne aj pre $k \geq 0$.)

Príklad 5. Funkcia
$$f(x) = \ln x$$
je diferencovateľná na celom R a jej derivácie sú
$$f'(x) = \frac{1}{x},$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2},$$
$$f'''(x) = \frac{2}{x^3},$$
$$f''''(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4},$$
$$f^{[k]}(x) = (-1)^{(k-1)} \frac{(k-1)!}{x^k}, \text{ pre } k \geq 1.$$

Druhá derivácia a lokálne extrémy

V tejto časti ukážeme, ako súvisí pojem druhej derivácie s rozhodovaním, či stacionárny bod je aj bodom lokálneho extrému. A ak áno, tak akého.

Ak si predstavíme lokálne minimum diferencovateľnej funkcie f v bode x_0 na grafe ako dno jamy, tak je zrejmé, že pred bodom x_0 funkcia klesá a teda jej derivácia je záporná a za ním rastie a jej derivácia je kladná. To vieme docieliť napríklad tak, že derivácia je rastúca a v bode x_0 nulová.

Ak má f aj druhú deriváciu v bode x_0, tak z rastu prvej derivácie plynie, že druhá musí byť kladná.

Podobné úvahy sa dajú zopakovať aj pre lokálne maximum a jeho predstavu ako vrcholu kopca, kedy musí byť druhá derivácia v bode x_0 záporná.

(Pre úplnosť a korektnosť poznamenajme, že naše predstavy dna jamy resp. vrcholu kopca nie sú všeobecné, a podmienka zahrnutá do vety nižšie nie je nutná, je len postačujúca.)

Veta (o lokálnych extrémoch II). *Nech $f : I \to R$ je funkcia dvakrát diferencovateľná na intervale I. Nech $x_0 \in I$ je jej stacionárny bod.*

Potom ak

- $f''(x_0) > 0$, *tak f má v bode x_0 ostré lokálne minimum,*
- $f''(x_0) < 0$, *tak f má v bode x_0 ostré lokálne maximum.*

Príklad 6. Nájdime lokálne extrémy funkcie

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2.$$

Riešenie.

Vypočítajme

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x.$$

Jej nulové body $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ sú stacionárne body funkcie f.

Pomocou znamienka druhej derivácie v stacionárnych bodoch rozhodneme, ktorý z nich je bodom lokálneho extrému a akého.

Pretože

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 8,$$

je

$f''(0) = 8 > 0$ a $x_1 = 0$ je teda bod ostrého lokálneho minima,

$f''(1) = -4 < 0$ a $x_2 = 1$ je teda bod ostrého lokálneho maxima,

$f''(2) = 8 > 0$ a $x_3 = 2$ je teda bod ostrého lokálneho minima.

Hodnoty lokálnych miním sú $f(0) = 0$ a $f(2) = 0$. Hodnota lokálneho maxima je $f(1) = 1$.

Príklad 7. Nájdime lokálne extrémy funkcie

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

Riešenie.

Vypočítajme

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$

Stacionárny bod funkcie f je bod $x_0 = e$.

Pretože

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1)2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x},$$

je

$f''(e) = \dfrac{\frac{1}{e}\ln^2 e - (\ln e - 1)2\ln e \cdot \frac{1}{e}}{\ln^4 e} = \dfrac{1}{e} > 0$ a teda bod $x_0 = e$ je bodom ostrého lokálneho minima.

Príklad 8. Nájdime lokálne extrémy funkcie

$$f(x) = x^4.$$

Každému je jasné, že funkcia je všade kladná, len v bode 0 má hodnotu $f(0) = 0$. Preto je 0 bodom ostrého lokálneho minima. (V tomto prípade aj absolútneho minima.)

Ak ale počítame $f'(x) = 4x^3$ a $f''(x) = 12x^2$, tak v stacionárnom bode $x_0 = 0$ je $f''(0) = 0$ a teda Veta z tejto kapitoly nám nedáva žiadnu odpoveď.

Problém: Dala by sa Veta nejako vylepšiť, tak aby pomohla aj v príklade 8?