Prednáška 4.

Spojitosť

V kapitole o limite sme hovorili o logicky predpokladanej hodnote funkcie v bode x_0 na základe hodnôt v okolí tohoto bodu.

Tento predpoklad pritom mohol, ale nemusel byť naplnený, funkcie mohla mať v bode x_0 inú hodnotu, ako predpovedala limita. Tiež nemusela byť v bode x_0 vôbec definovaná.

O spojitosti funkcie v bode x_0 budeme hovoriť, ak sa jej limita zhoduje s jej funkčnou hodnotou v danom bode.

Ako sa tento pojem zhoduje s naivnou predstavou o spojitej čiare? Jednoducho. Ak je funkcia definovaná na intervale a je spojitá v každom jeho bode, tak jej graf je krivka odpovedajúca našim predstavám o spojitosti (v zmysle nepretrhnutej čiary).

Presnejšie sformulujeme predchádzajúce úvahy do definície.

Definícia. Nech $f : A \to R$, a nech $x_0 \in A$. Hovoríme, že funkcia f je **spojitá** v bode x_0, ak

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Všimnime si, že posledný riadok definície hovorí, že limita existuje, je vlastná, a do tretice, že limita sa rovná hodnote funkcie v bode x_0.

Definícia. Nech $f : I \to R$ je definovaná a spojitá v každom bode $x_0 \in I$. Hovoríme, že funkcia f je **spojitá na intervale I.**

Na základe výpočtov limít vieme, že

Príklad 1. Konštantná funkcia

$$f(x) = c$$

je spojitá v každom bode $x \in R$ a teda je spojitá na R.

Príklad 2. Funkcia

$$f(x) = x$$

je spojitá v každom bode $x \in R$ a teda je spojitá na R.

Príklad 3. Funkcia

$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$

nie je spojitá v bode $x_0 = 0$, lebo $\lim\limits_{x \to 0+} = 1$ a $\lim\limits_{x \to 0-} = -1$.
(Ale je spojitá v každom inom bode.)

Z viet o vlastnej limite vyplývajú analogické vety o spojitosti.

Veta o spojitosti. *Nech $f : A \to R$, $g : A \to R$ sú spojité funkcie v bode x_0 Potom*

- *$f(x) + g(x)$ je spojitá funkcia v bode x_0,*
- *$f(x) \cdot g(x)$ je spojitá funkcia v bode x_0,*
- *ak naviac $g(x_0) \neq 0$, tak $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ je spojitá funkcia v bode x_0.*

Veta (o spojitosti zloženej funkcie). *Nech* $f : A \to B$, $g : B \to R$. *Nech*

- $f(x)$ *je spojitá v bode* x_0,
- $g(y)$ *je spojitá v bode* $y_0 = f(x_0)$.

Potom zložená funkcia $g(f(x))$ *je spojitá v bode* x_0.

Voľne povedané, súčet, súčin, podiel a zložená funkcia zo spojitých funkcií je spojitá všade tam, kde je príslušná operácia definovaná.

Príklad 4. Polynomická funkcia

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_0$$

je spojitá na celom R.

Príklad 5. Racionálna funkcia

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

je spojitá na každom intervale svojho $D_f = \{x;\ Q_m(x) \neq 0\}$.

Príklad 6. Zistime, či je v bode 0 spojitá funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pre } x \neq 0 \\ 0 & \text{pre } x = 0. \end{cases}$$

Riešenie. Podľa vety o súčine je

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

a preto je f spojitá v bode 0.

Príklad 7. Zvoľme konštantu a tak, aby bola v bode 1 spojitá funkcia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{pre } x > 1 \\ ax + 2 & \text{pre } x \leq 1. \end{cases}$$

Riešenie.

$$\lim_{x \to 1+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \to 1-} ax + 2 = a + 2 = f(1).$$

Aby bola f spojitá v bode 1, musí byť $a + 2 = \frac{1}{2}$ a teda $a = -\frac{3}{2}$.

Spojitá funkcia na uzavretom intervale

V tejto trochu teoretickejšej časti sa budeme venovať vlastnostiam spojitej funkcie, ktorej definičným oborom je interval $[a, b]$. Poznamenajme, že je dôležité, že interval je uzavretý a ohraničený.

Veta (o vlastnostiach). *Nech $f : [a, b] \to R$ je spojitá funkcia.*
Potom

- *f je ohraničená funkcia,*
- *f na intervale $[a, b]$ nadobúda minimum aj maximum,*
- *jej obor hodnôt H_f je buď uzavretý a ohraničený interval, alebo jeden bod.*

Poznamenajme, že tretia vlastnosť v sebe skrýva predošlé dve. Kvôli zdôrazneniu sme ich uviedli zvlášť.

Namiesto dôkazu uvedieme len príklady na ktorých vidno význam predpokladov.

Príklad 8. Funkcia
$$f(x) = x^2$$
je síce spojitá, ale ak ju uvažujeme na maximálnom definičnom obore R, ktorý nie je ohraničený, tak nie je ani ohraničená, ani nemá maximum a jej $H_f = [0, \infty)$.

Ohraničenosť definičného oboru je nutná.

Príklad 9. Funkcia
$$f(x) = \operatorname{tg} x$$
definovaná na intervale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je síce spojitá na tomto intervale, ale definičný obor, nie je uzavretý.

Funkcia f nie je ani ohraničená, ani nemá maximum, ani minimum a jej $H_f = R$.

Uzavretosť definičného oboru je nutná.

Príklad 10. Funkcia
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ pre } x \neq 0 \\ 0 \text{ pre } x = 0 \end{cases}$$
definovaná na intervale $[-1, 1]$ nie je spojitá v bode 0.

Funkcia f nie je ani ohraničená, ani nemá maximum, ani minimum a jej $H_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Spojitosť funkcie je nutná.

Druhé tvrdenie je tiež skryté vo vete o vlastnostiach, ale pretože je základom numerického hľadania riešení rovníc, tiež ho uvedieme zvlášť.

Veta (o koreni). *Nech $f : [a, b] \to R$ je spojitá funkcia.*
Nech hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ majú rôzne znamienka.
Potom existuje taký bod $c \in (a, b)$, že
$$f(c) = 0$$
.

Príklad 11. Bisekcia. Predstavme si, že riešime rovnicu

$$x^5 + 3x^3 - x^2 - x - 1 = 0.$$

Pre nájdenie koreňov nepoznáme žiaden vzorec.

Funkcia

$$f(x) = x^5 + 3x^3 - x^2 - x - 1$$

je spojitá.

Ľahko zistíme, že $f(0) = -1$ a $f(1) = 1$.

Z vety o koreni vieme, že niekde v intervale $(0, 1)$ je jedno riešenie našej rovnice.

Skúsme bod $\frac{1}{2}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{43}{32}.$$

Nie je to síce riešenie, ale už vieme, že koren ň je niekde v intervale $(\frac{1}{2}, 1.$

Opäť skúsme vypočí tať hodnotu v strede tohoto intervalu, v bode $\frac{3}{4}$.

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{829}{1024}.$$

Koren ň je teda niekde v intervale $(\frac{3}{4}, 1.$

Skúsme ešte raz vypočí tať hodnotu v strede tohoto intervalu, v bode $\frac{7}{8}$.

$$f\left(\frac{7}{8}\right) = -\frac{3865}{32768} \doteq -0.118.$$

Takéto postupné spresňovanie sa volá metóda bisekcie. Uvedomme si že sa vieme priblí žiť ku koreňu s ľ ubovoľnou vopred zadanou presnosťou.

Metóda je dosť pomalá, moderné metódy sú rýchlejšie, ale aj ony majú niekde v pozadí využitie vety o koreni.

Úloha. Môžete si sami vyskúšať eše jeden alebo dva ďalšie kroky. Potom nájdite (približný) koreň použitím vhodného softvéru.