Prednáška 21.

Určitý integrál

Motiváciou pre zavedenie určitého integrálu bude pre nás nasledujúca úloha.

Vezmime funkciu f definovanú na uzavretom intervale $[a, b]$. Pre začiatok predpokladajme, že je spojitá a kladná. Pýtame sa, na veľkosť obsahu oblasti ohraničenej zhora grafom funkcie f, zdola osou x a zo strán úsečkami, ktoré ležia na „zvislých" priamkach $x = a$ a $x = b$.

V špeciálnom prípade konštantnej funkcie $f(x) = c$ je úloha jednoduchá. Oblasť pod grafom funkcie je obdĺžnik s dĺžkami strán $b - a$ a c.

Obsah oblasti je číslo

$$S = c \cdot (b - a).$$

Ak je funkcia nekonštantná (a spojitá), tak z jej vlastností na uzavretom intervale $[a, b]$ vieme, že na tomto intervale nadobúda maximum $M = \max f(x)$ aj minimum $m = \min f(x)$.

Obsah oblasti, číslo S, vieme odhadnúť ako

$$m \cdot (b - a) \leq S \leq M \cdot (b - a).$$

Náš odhad je tým nepresnejší, čím väčší je rozdiel medzi číslami $m \cdot (b - a)$ $M \cdot (b - a)$. Dalo by sa povedať, že čím viac sa funkcia f líši od konštantnej, tým je odhad horší.

Zlepšíme dosiahnutý odhad tým, že rozdelíme interval $[a, b]$ na menšie časti (podintervaly) pomocou konečného počtu deliacich bodov. Na obrázku nižšie sme použili okrem a a b ešte ďalšie dva body x_1, x_2 usporiadané podľa veľkosti

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq b.$$

Označme $x_0 = a$ a $x_3 = b$. Interval $[a, b]$ je rozdelený na tri intervaly $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$.

Na každom z nich zopakujeme odhad pomocou vpísaného obdĺžnika s výškou $m_i = \min\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$ a opísaného obdĺžnika s výškou $M_i = \max\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Ak obsah oblasti nad i-tym intervalom je S_i, tak

$$m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq S_i \leq M_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Pre celý obsah oblasti dostaneme odhad

$$m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+m_3(x_3-x_2) \leq S \leq M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+M_3(x_3-x_2).$$

Za naší m postupom je skrytá predstava, že ak interval $[a, b]$ rozdelíme na jemnejšie dieliky, tak dostaneme presnejší odhad obsahu oblasti pod grafom funkcie.

Konečnú postupnosť $\{x_0 = a,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = b\}$, v ktorej $x_{i-1} < x_i$ nazývame delením intervalu $[a, b]$ a značíme $\mathcal{D}$. Jemnosť delenia $\mathcal{D}$ meriame pomocou veľkosti najdlhšieho z intervalov $[x_{i-1}, x_i]$. Používame označenie $|\mathcal{D}| = \max(x_i - x_{i-1})$.

Odhady zdola (zhora) nazveme dolné (horné) integrálne súčty funkcie f. V definícii nižšie už nepredpokladáme, že funkcia f je spojitá a kladná. Preto aj maximá a minimá nahradíme všeobecnejšími supremami a infimami.

Definícia. Nech $f : [a, b] \to R$ je ohraničená funkcia a nech $\mathcal{D} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ je delenie intervalu $[a, b]$.

Označme $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$ a $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$.

Číslo

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

nazývame dolný integrálny súčet funkcie f pri delení $\mathcal{D}$.

Číslo

$$\overline{S}(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

nazývame horný integrálny súčet funkcie f pri delení $\mathcal{D}$.

Ak sa medzi všetky možné dolné a všetky možné horné integrálne súčty zmestílen jediné číslo I, tak toto číslo považujeme za „správny" obsah oblasti ohraničenej zhora grafom funkcie f.

Definícia určitého integrálu. Ohraničená funkcia $f : [a, b] \to R$ sa nazýva integrovateľná, ak existuje jediné číslo I také, že pre každé delenie $\mathcal{D}$ intervalu $[a, b]$ je

$$\underline{S}(f, \mathcal{D}) \leq I \leq \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Toto číslo I nazývame určitý integrál funkcie f na intervale $[a, b]$.

Značíme

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Poznamenajme, že ak číslo I existuje, dá sa k nemu dostať aj limitným prechodom pri postupnom zjemňovaní delení $\mathcal{D}_n$

$$I = \lim_{|\mathcal{D}_n| \to 0} \underline{S}(f, \mathcal{D}) = \lim_{|\mathcal{D}_n| \to 0} \overline{S}(f, \mathcal{D}).$$

Ak delíme interval $[a, b]$ na dieliky rovnomerne, dĺžku každého dielika označíme ako $\triangle x$ a miesto supréma alebo infima vezmeme niektorú hodnotu funkcie $f(\tilde{x}_i)$ pre $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tak

$$I = \lim_{\triangle x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i) \triangle x,$$

odkiaľ aj pochádza označenie pre určitý integrál funkcie f, pri prechode od $f(\tilde{x}_i)\triangle x$ ku diferenciálu $f(x)dx$.

Definícia určitého integrálu vyzerá dosť ťažkopádne. Napriek tomuto zdaniu je podstatou numerických metód na jeho výpočet.

Vlastnosti určitého integrálu.

Veta o existencii. *Každá ohraničená funkcia $f : [a, b] \to R$, ktorá má na intervale $[a, b]$ konečne veľa bodov nespojitosti, je na intervale $[a, b]$ integrovateľná.*

Na to, aby sme našli neintegrovateľnú funkciu, musíme buď zobrať funkciu neohraničenú, alebo odbočiť od „bežne používaných” funkcií.

Príklad neintegrovateľnej funkcie. Funkcia $d : [0, 1] \to [[0, 1]$ daná predpisom

$$d(x) = \begin{cases} 1 \text{ pre } x \in Q \\ 0 \text{ pre } x \neq Q \end{cases}$$

nie je integrovateľná funkcia. (*Rozmyslite si, ako vyzerajú jej horné a dolné integrálne súčty.*)

Nasledujúcu vetu o vlastnostiach určitého integrálu nebudeme dokazovať vyplýva z vlastnostídolných a horných integrálnych súčtov.

Veta o vlastnostiach. *Nech $f : [a, b] \to R$, $g : [a, b] \to R$ sú integrovateľné funkcie a nech α, β sú konštanty.*

Potom

- *funkcia $\alpha f + \beta g$ je integrovateľná a*

$$\int_a^b [\alpha f + \beta g](x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx \qquad \textit{(Linearita)}$$

- *pre ľubovoľné $c \in (a, b)$ je*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b fx)\, dx \qquad \textit{(Aditivita)}$$

Definícia. Pre integrovateľnú funkciu $f : [a, b] \to R$ rozumieme označením $\int_b^a f(x)\,dx$ číslo

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Z predchádzajúcej definície, a aj z predstavy určitého integrálu ako obsahu plochy je zrejmé, že

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Nasledujúca veta hovorí, že väčšia funkcia ohraničuje väčšiu plochu.

Veta o porovnaní. *Nech $f : [a, b] \to R$, $g : [a, b] \to R$ sú integrovateľné funkcie a nech $f(x) \le g(x)$ na celom $[a, b]$.*

Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Z vety o porovnaní plynie veta o absolútnej hodnote.

Veta o absolútnej hodnote. *Nech $f : [a, b] \to R$, je integrovateľná funkcia. Potom aj $|f| : [a, b] \to R$, je integrovateľná funkcia, a platí*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

A postupne prichádzame k naozaj významným výsledkom.

Veta o strednej hodnote. *Nech $f : [a, b] \to R$, je spojitá funkcia. Potom existuje také číslo $c \in (a, b)$, že*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a).$$

Rozmyslime si, čo veta o strednej hodnote hovorí.

Obsah oblasti ohraničenej zhora spojitou funkciou (zdôrazňujeme spojitou) f je rovnaký, ako obsah obdĺžnika s výškou $f(c)$. Veta zaručuje, že také c sa dá vždy nájsť.

Číslo $f(c)$ nazývame stredná hodnota funkcie f na intervale $[a, b]$.

Strednú hodnotu vieme definovať aj v trochu všeobecnejšom prípade, keď funkcia f nie je spojitá.

Definícia strednej hodnoty. Nech $f : [a, b] \to R$ je integrovateľná funkcia. Číslo

$$\frac{\int_b^a f(x)\,dx}{b - a}$$

nazývame stredná hodnota funkcie f na intervale $[a, b]$.

Vyvrcholením tejto kapitoly je nasledujúca veta, ktorá hovorí o vzťahu medzi určitým a neurčitým integrálom (primitívnou funkciou), a tiež jej dôsledok.

Veta (Hlavná veta integrálneho počtu). *Nech $f : [a, b] \to R$, je spojitá funkcia. Potom funkcia F*

$$F(x) = \int_a^x f(\tilde{x})\, d\tilde{x}$$

je primitívna funkcia k funkcii f.

Všimnime si, že F je tá primitívna funkcia, ktorá má v bode a hodnotu $F(a) = 0$. Vieme, že všetky ostatné primitívne funkcie sa od tejto líšia o konštantu.

Dôsledok (Newton-Leibnitzov vzorec). *Nech $f : [a, b] \to R$, je spojitá funkcia a nech F je niektorá jej primitívna funkcia.*

Potom

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Až Newton-Leibnitzov vzorec nám dáva efektívny nástroj na výpočet určitého integrálu.

Spomeňme ešte, že pri výpočtoch sa často používa značka

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\,.$$

Príklad 1. Vypočítajme

$$\int_0^\pi \sin x\, dx.$$

Riešenie. Pretože primitívna funkcia F k funkcii $\sin x$ je $F(x) = -\cos x$, použitím Newton-Leibnitzovho vzorca dostaneme

$$\int_0^\pi \sin x\, dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos 0 = 2.$$

Vypočítali sme obsah plochy ohraničenej funkciou sinus na intervale od 0 po π.

Príklad 2. Vypočítajme

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\, dx.$$

Riešenie. Nájdime najprv primitívnu funkciu F.

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}\, dx =$$

po substitúcii $y = \cos x, \qquad dy = -\sin x\, dx$

$$= -\int \frac{1}{1 - y^2}\, dy = -\int \frac{\frac{1}{2}}{1 + y}\, dy - \int \frac{\frac{1}{2}}{1 - y}\, dy = -\frac{1}{2} \ln|1 + y| + \frac{1}{2} \ln|1 - y| =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{|1 - \cos x|}{|1 + \cos x|}.$$

Teraz použijeme Newton-Leibnitzov vzorec a dostaneme

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\, dx = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{|1-\cos x|}{|1+\cos x|}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{|1-\cos\frac{\pi}{2}|}{|1+\cos\frac{\pi}{2}|} - \frac{1}{2} \ln \frac{|1-\cos\frac{\pi}{3}|}{|1+\cos\frac{\pi}{3}|} = \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \ln 3.$$