Prednáška 2.

Limita funkcie

Okrem množiny reálnych čísel R budeme používať aj rozšírenú množinu reálnych čísel $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$. Pretože znaky $\pm\infty$ nie sú čísla, prvky množiny R^* budeme volať body.

Predstavte si, že máte agentúru, ktorá pre klienta ro'bí prieskum verejnej mienky. Máte k dispozícií dáta zaq každý deň a vašou úlohou je urobiť odhad k stanovenému dátumu.

Prenesené do sveta reálnych funkcií: Poznáme hodnotu funkcie v každom čísle x, okrem jedného. Našou úlohou je odhadnúť hodnotu funkcie v tomto čísle x_0.

Tento (kvalifikovaný) odhad budeme volaťlimita funkcie v bode x_0.

Dodali sme slovo kvalifikovaný, aby sme zdôraznili, že odhad nebudeme robiť ľubovoľne, ale podľa pevných pravidiel.

Predovšetkým je rozumné predpokladať, že hodnoty $f(x)$, v bodoch x, ktoré sú ďaleko od bodu x_0 majú na výsledný odhad malý vplyv. Naopak hodnoty v bodoch blízko x_0 odhad ovplyvňujú viac. Potrebujeme merať čo je blízko. Na to slúži pojem okolie bodu.

Interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nazývame δ okolím čísla x_0. Pritom $\delta > 0$ udáva maximálnu vzdialenosť od čísla x_0. Označujeme

$$O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Pri odhade predpokladáme, že hodnota v bode x_0 nie je známa. Preto okrem okolia, používame aj prstencové okolie čísla x_0.

Množinu

$$O_\delta^\circ(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

voláme prstencové okolie čísla x_0.

Interval $O_\delta(\infty) = (\frac{1}{\delta}, \infty)$ nazývame δ okolím bodu ∞. Rozmyslite si, že aj v tomto prípade čím je číslo $\delta > 0$ menšie, tým je okolie $O_\delta(\infty)$ menšie.

Analogicky je zavedené okolie bodu $-\infty$.

na osi y zvykneme pre veľkosť okolia použiť písmeno ε.

Pomocou voľby δ sa vieme dostať k bodu x_0 ľubovoľne blízko. Pre účely odhadu ale potrebujeme, aby v číslach x blízko bodu x_0 bola funkcia f definovaná. Na to slúži pojem hromadný bod.

Bod x_0 nazývame hromadný bod definivņého oboru A funkcie f, ak sa ľubovoľne blízko k nemu nachádza nejaký bod $x \neq x_0$ z definičného oboru. Zapísané pomocou okolí,

$$O_\delta^\circ(x_0) \cap A \neq \emptyset.$$

Teraz už vieme vysloviťdefiníciu limity.

Definícia. Nech $f : A \to R$, a nech x_0 je hromadný bod množiny A. Hovoríme, že funkcia f má v bode x_0 limitu $L \in R^*$, ak

pre každé okolie $O_\varepsilon(L)$ existuje okolie $O_\delta^\circ(x_0)$, také, že ak $x \in O_\delta^\circ(x_0)$ tak potom $f(x) \in O_\varepsilon(L)$.

Značíme $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Toto je možno najťažšie čitateľná definícia z celého kurzu.

Prečítajme si ju pre prípad, keď L je číslo.

Hovorí, že L je kvalifikovaný odhad, ak pre hocijakú dopredu nastavenú odchýlku ε od odhadu L sa vieme dostať ku x_0 tak blízko (O_δ°), že už sa hodnoty $f(x)$ líšia od odhadu L o menej ako ε.

Niekedy v texte použijeme aj označenie: ak $x \to x_0$ tak $f(x) \to L$, čo čítame ak x sa blíži k x_0, tak $f(x)$ sa blíži k L.

Použitím definície vypočítame niektoré jednoduché limity.

Príklad 1.

$$\lim_{x\to 3} 1 = 1,$$

a všeobecne

$$\lim_{x\to x_0} c = c.$$

Riešenie.

Naozaj, ak pre hodnotu $L = 1$ zvolíme akékoľvek $\varepsilon > 0$, tak hodnota funkcie $f(x)$ sa od L líši o menej ako ε, (lebo je tiež presne 1) a to bez ohľadu na veľkosť δ.

To isté platí aj vo všeobecnom prípade.

Príklad 2.

$$\lim_{x\to 2} x = 2,$$

a všeobecne

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

Riešenie.

Teraz ak pre hodnotu $L = 2$ zvolíme $\varepsilon > 0$, tak pri voľbe $\delta = \varepsilon$ sa na okolí O_δ° hodnota funkcie $f(x) = x$ líod L o menej ako ε.

Tak isto volíme $\delta = \varepsilon$ aj vo všeobecnom prípade.

Príklad 3.

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty,$$

Riešenie.

Tento výsledok je obsiahnutý vo všeobecnom prípade príkladu 2, len si aj slovne uvedomme, že ak $x \to \infty$ tak aj $f(x) \to \infty$, pretože $f(x) = x$.

Poznamenajme, že ak L je číslo, hovoríme o vlastnej limite a ak $L = -\infty$ alebo $L = \infty$ hovoríme o nevlastnej limite.

Výpočet limity

Počítanie limít pomocou definície je pomerne zdĺhavé a používame ho len keď nemáme inú možnosť.

Tou inou možnosťou sú pravidlá výpočtu limít.

Veta o výpočte vlastnej limity. *Nech $f : A \to R$, $g : A \to R$ a nech existujú vlastné limity $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$.*

Potom

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) \ = L_1 \cdot L_2$,
- *ak naviac $L_2 \neq 0$, tak* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$.

Príklad 4. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to 2} x^2 - 3x + 7$$

Riešenie. Použijeme vetu a výsledky Príkladov 1 a 2.

$$\lim_{x\to 2} x^2 - 3x + 7 = \lim_{x\to 2} x \cdot \lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 3 \cdot \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 7 = 4 - 6 + 7 = 5.$$

Veta (o zúžení). *Nech $f : A \to R$, $g : A_1 \to R$ pričom $A_1 \subset A$ a nech x_0 je hromadný bod A_1. Nech existuje limita $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.*

Potom aj $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$.

Príklad 5. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

Riešenie.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}.$$

Funkcia nie je definovaná v bode $x_0 = 2$. Krátenie v zlomku vedie k rozšíreniu definičného oboru. Ak mározšírenie limitu, tak tú istú limitu má aj zúženie.

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x + 2 = 4.$$

Príklad 6. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - \sqrt{7-x}}$$

Riešenie.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x})} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x})}{2x-6} = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}}{2} = 2$$

Príklad 7. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to 0}|\operatorname{sgn} x|$$

Riešenie.

$$\lim_{x\to 0}|\operatorname{sgn} x| = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Naozaj funkcia $|\operatorname{sgn} x| = 1$ pre $x \neq 0$. Všimnime si, že limita v nule je 1 a nezhoduje sa s funkčnou hodnotou v nule, $\operatorname{sgn}|0| = 0$.

Jednostranné limity

Zavedieme dve špeciálne zúženia funkcie $f : A \to R$.

Pri zúžení na množinu $A_- = A \cap (-\infty, x_0)$ hovoríme o limite zľava v bode x_0. Značíme $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = L^/$.

Pri zúžení na množinu $A_+ = A \cap (x_0, \infty)$ hovoríme o limite sprava v bode x_0. Značíme $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = L^+$.

Z vety o zúženíplynie nasledujúca veta.

Veta (o existencii). *Nech $f : A \to R$, a nech existujú limity sprava aj zľava,*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = L^- \qquad \lim_{x\to x_0+} f(x) = L^+.$$

Potom

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

práve vtedy, keď

$$L^+ = L^- = L$$

.

Z tejto vety je najdôležiejšia skutočnosť, že ak sa limity zľava a sprava nerovnajú, tak funkcia nemá v čísle x_0 limitu.

Príklad 8. Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$$

Riešenie.

$$\lim_{x\to 0+}\operatorname{sgn} x = \lim_{x\to 0+} 1 = 1$$
$$\lim_{x\to 0-}\operatorname{sgn} x = \lim_{x\to 0-} -1 = -1.$$

Pretože $1 \neq -1$ funkcia $\operatorname{sgn}(x)$ nemá v bode 0 limitu.