Prednáška 17.

Integračné metódy

V mnohých situáciách nevystačíme len s použitím elementárnych vzorcov a vety o linearite neurčitého integrálu.

Potrebujeme aj ďalšie metódy analogicky ako v kapitole o diferenciálnom počte. Metóda integrovania per partes a substitučná metóda sú odvodené z viet o derivovaní súčinu a zloženej funkcie.

Metóda integrácie per partes

Základom metódy integrácie per partes je veta o derivovaní súčinu. Pripomeňme ju

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'.$$

Ak sa teraz skúsime vrátiťspäť, a spýtame sa, čosme derivovali, dostaneme sa k rovnosti

$$\int (f \cdot g)'\, dx = \int f'g + fg'\, dx.$$

Na ľavej strane sa pýtame na primitívnu funkciu k derivácii $(f \cdot g)'$. To je ale pôvodná funkcia $f \cdot g$.

na pravej strane použijeme linearitu integrálu. Dostaneme:

$$f \cdot g = \int f'g\, dx + \int fg'\, dx.$$

Teraz si predstavme, že jeden z integrálov na pravej strane je „ťaž ký". Vieme ho vyjadriť pomocou druhého z nich. Teda

$$\int f'g\, dx = f \cdot g - \int fg'\, dx.$$

Tento postup má zmysel, ak integrál na ľavej strane nevieme vypočítať, ale integrál na pravej strane rovnice áno. Metódu zhrnieme do vety.

Veta(o metóde per partes). *Nech $f,\ g : I \to R$ sú diferencovateľné funkcie. Potom*

$$\int f'(x)g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx$$

Príklad 1. Vypočítajme

$$\int x \cdot e^x\, dx.$$

Riešenie.
Zvoľme
$$f'(x) = e^x, \qquad g(x) = x$$
potom
$$f(x) = e^x, \qquad g'(x) = 1.$$
Podľa vety o metóde per partes je
$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + c.$$

Príklad 2. Vypočítajme
$$\int x \cdot \sin x \, dx.$$

Riešenie.
Zvoľme
$$f'(x) = \sin x, \qquad g(x) = x,$$
potom
$$f(x) = -\cos x, \qquad g'(x) = 1.$$
Podľa vety o metóde per partes je
$$\int x \cdot \sin x \, dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + c.$$

Z predošlých dvoch príkladov vidíme, že kľúčovým miestom riešenia je voľba, ktorú funkciu zvoliť za f' a ktorú za g.

Príklad 3. Vypočítajme
$$\int \ln x \, dx.$$

Riešenie. Tu sa zdá, že v zadanínie je súčin dvoch funkcií. Považujeme preto jeden činiteľ za konštantnú funkciu 1 a zvolíme
$$f'(x) = 1, \qquad g(x) = \ln x,$$
potom
$$f(x) = x, \qquad g'(x) = \frac{1}{x}.$$
Podľa vety o metóde per partes je
$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + c.$$

Príklad 4. Vypočítajme
$$\int x^2 e^x \, dx.$$

Riešenie. Zvolíme

$$f'(x) = e^x, \qquad g(x) = x^2,$$

potom

$$f(x) = e^x, \qquad g'(x) = 2x.$$

Podľa vety o metóde per partes je

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx.$$

Teraz použijeme opakovane metódu per partes.
Zvolíme

$$f'(x) = e^x, \qquad g(x) = 2x,$$

potom

$$f(x) = e^x, \qquad g'(x) = 2.$$

$$x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx = x^2 e^x - \left(2x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x \, dx\right) = x^2 e^x - 2x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + c.$$

Príklad 5. Vypočítajme

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx.$$

Riešenie. Zvolíme

$$f'(x) = x, \qquad g(x) = \operatorname{arctg} x,$$

potom

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2, \qquad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Podľa vety o metóde per partes je

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx.$$

A po úprave

$$\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c.$$

Príklad 6. Vypočítajme

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx.$$

Riešenie. Zvolíme
$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \ln x,$$
potom
$$f(x) = \ln x, \qquad g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Podľa vety o metóde per partes je
$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\, dx.$$

Z posledného vzťahu je
$$2 \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \ln^2 x.$$

Teda
$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + c.$$