Prednáška 16.

Integrálny počet

V tejto časti prednášok uvedieme základný koncept neurčitého a určitého integrálu funkcie jednej reálnej premennej.

Všimneme si, čím sa neurčitý a určitý integrál líšia a čo majú spoločné.

Zvládneme základné integračné techniky a uvedieme niektoré aplikácie integrálneho počtu.

Neurčitý integrál

V kapitole venujúcej sa diferenciálnemu počtu sme definovali deriváciu funkcie f. Derivácia v danom bode x_0 je pojem lokálny, založený na existencii istej limity v tomto bode.

Pre funkciu, ktorá má deriváciu v každom bode intervalu I sme zaviedli deriváciu f' ako funkciu definovanú na intervale I.

V tomto zmysle môžeme chápať derivovanie ako proces - operáciu, ktorá každej diferencovateľnej funkcii priradí jej deriváciu.

Schematicky:

$$f \longrightarrow f'.$$

Položme si otázku, či vieme pri znalosti výsledku derivovania rekonštruovať pôvodnú funkciu f.

Takýto proces - operáciu nazývame inverzná a ak sa nám ju podarí zaviesť, budeme ju volať integrovanie.

Na začiatok niekoľko motivačných príkladov.

Pre neznámu funkciu $F(x)$ zaveďme označenie

$$F'(x) = f(x).$$

Ak teraz poznáme

$$F'(x) = f(x) = 2x$$

vieme nájsť pôvodnú funkciu F?

Väčšinou nás hneď napadne odpoveď $F(x) = x^2$. Je samozrejme správna, ale nie jediná možná. Rovnako dobrá odpoveď je $F(x) = x^2 + 3$. A zrazu máme nekonečne veľa správnych odpovedí, ktoré sa ale na seba podobajú. Pôvodnú funkciu teda nevieme nájsť jednoznačne.

A ešte môžeme porozmýšľať' či nevieme nájsť $F(x)$ nejakého iného tvaru, odlišného od $x^2 + c$. To nám, aspoň na prvý pokus, nejde.

V nasledujúcej definícii pomenujeme správne odpovede a vo vete tvrdíme, že žiadne odlišné odpovede od $x^2 + c$ nie sú.

Definícia. Nech $f : I \to R$, pričom I je interval. Funkciu $F : I \to R$ takú, že pre každé $x \in I$ je $F'(x) = f(x)$ nazývame primitívna funkcia k funkcii f.

Veta. *Nech $F_1,\ F_2 : I \to R$ sú primitívne funkcie k funkcii f. Potom $F_1(x) - F_2(x) = c$.*

Pretože dôkaz je priamočiary, uvedieme aj ten.

Dôkaz. Ak $F_1,\ F_2 : I \to R$ sú primitívne funkcie k tej istej funkcii f, potom

$$F_1'(x) = f(x) \qquad [aj] \qquad F_2'(x) = f(x).$$

Preto

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Jediné funkcie, ktoré majú na intervale nulovú deriváciu sú konštantné. (Prečo?)
Teda $F_1(x) - F_2(x) = c$. $\square$

Na základe predošlej definície a vety, môžeme hovoriťo množine všetkých primitívnych funkcií k danej funkcii $f : I \to R$. Pritom stačí poznať jednu primitívnu funkciu, a ňou sú už určené všetky.

Množinu všetkých primitívnych funkciík danej funkcii nazývame neurčitý integrál.

značíme ju

$$\int f(x)\,dx.$$

Pretože s množinami sa pracuje trochu ťažkopádne, rozumieme pod označením $\int f(x)\,dx$ niektorˇ z primitívnych funkciík funkcii f a hovoríme, že

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

V kapitole diferenciálny počet sme odvodili tabuľku derivácií elementárnych funkcií. Teraz po výmene stĺpcov a malých úpravach z nej zostavíme tabuľku elementárnych neurčitých integrálov. Tu je:

Elementárne neurčité integrály:

$$\int 0\,dx = c \qquad \int e^x\,dx = e^x + c,$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c,$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + c,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a}) + c.$$

Rovnako ako v diferenciálnom počte, aj pri integrovaní využijeme vlastnosť linearity.

Veta(o linearite). *Nech $F,\ G : I \to R$ sú primitívne funkcie k funkciám f a g. Potom funkcia $\alpha F(x) + \beta G(x)$ je primitívna funkcia k funkcii $\alpha f + \beta g$.*

Dôkaz. Priamo derivovaním $\alpha F(x) + \beta G(x)$ dostaneme

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

□

V inom označení má linearita neurčitého integrálu podobu

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

Príklad 1.

$$\int x + 2\cos x\, dx = \int x\, dx + 2\int \cos x\, dx = \frac{x^2}{2} + 2\sin x + c.$$

Príklad 2.

$$\int \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx + \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c.$$

Príklad 3.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\, dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2}\, dx = x - \operatorname{arctg} x + c.$$

Príklad 4.

$$\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x}\, dx =$$

$$= \int \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\, dx = \int |\sin x + \cos x|\, dx =$$

$$= \begin{cases} \sin x - \cos x & \text{ak } \sin x + \cos x \geq 0 \\ -\sin x + \cos x & \text{ak } \sin x + \cos x < 0. \end{cases}$$

Príklad 5.

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x - x + c.$$

Prirodzená je otázka, ktoré funkcie majú primitívnu funkciu resp. neurčitý integrál.

Veta. *Každá spojitá funkcia na intervale I má primitívnu funkciu.*

Poznamenajme, že ak je funkcia spojitá, a teda má primitívnu, to ešte neznamená, že ju vieme aj vypočítať. Primitívna funkcia sa nemusí dať vyjadriť pomocou konečného počtu používaných elementárnych funkcií. Príkladom takej funkcie je e^{-x^2}.

Ak potrebujeme primitívnu funkciu k spojitej funkcii tohoto typu, nemáme inú možnosť, ako zaviesť nové pomenovanie elementárnej funkcie. (*Napríklad v štatistike používaná primitívna funkcia k e^{-x^2} dostala pomenovanie* erf(x) *z anglického error function.)*