Prednáška 15.

Mocninové rady a Taylorov rad

Mocninové rady.

Z kapitoly o geometrickom rade vieme, že ak kvocient q spĺňa $|q| < 1$, tak

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = a_0 \frac{1}{1-q}.$$

Reprezentujme teraz q ako reálnu premennú. Formálne ostáva rovnosť rovnaká.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n = a_0 \frac{1}{1-x}$$

pre $-1 < x < 1$.

Teraz ju ale chápeme ako rovnosť funkcií,

$$f(x) = a_0 \frac{1}{1-x} = a_0(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \dots).$$

Funkciu $f(x)$ môžeme chápať ako nekonečný polynóm na intervale $(-1, 1)$.

Príklad 1. Rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n = \frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{2-x}$$

konverguje pre $x \in (0, 2)$.

Príklad 2. Rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-(\frac{x-1}{3})} = \frac{3}{4-x}$$

konverguje ak $-1 < \dfrac{x-1}{3} < 1$, teda pre $x \in (-2, 4)$.

Príklad 3. Rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \left(x - \frac{3}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4x-3}{5}\right)^n = \frac{1}{1-(\frac{4x-3}{5})} = \frac{5}{8-4x}$$

konverguje ak $-1 < \dfrac{4x-3}{5} < 1$, teda pre $x \in (-\frac{1}{2}, 2)$.

Geometrický rad z Príkladu 3 zovšeobecníme do podoby, kedy sčítavame členy typu $(x - x_0)^n$ násobené koeficientom, ktorý nie je konštantný.

Definícia. Rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x - x_0)^n$$

nazývame mocninový rad so stredom v bode x_0 a koeficientami a_n.

O konvergencii mocninového radu hovorí táto veta.

Veta. *Pre mocninový rad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

existuje také $r \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$, *že rad*
konverguje na intervale $(x_0 - r, x_0 + r)$ *a*
diverguje pre $x \notin (x_0 - r, x_0 + r)$.
Číslo r *nazývame polomer konvergencie mocninového radu.*

Ak $r = \infty$, tak rad konverguje na celej reálnej osi R.

Veta o polomere. *Ak existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l$$

alebo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = l$$

tak polomer konvergencie mocninového radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

je
$r = \infty$, *ak* $l = 0$,
$r = 0$, *ak* $l = \infty$,
$r = \frac{1}{l}$, *ak* $0 < l < \infty$.

Príklad 4. Majme rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(x-2)^n.$$

Pretože

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

tak polomer konvergencie $r = 1$ a rad konverguje na intervale $(1, 3)$.

Príklad 5. Majme rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}.$$

Pretože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

tak polomer konvergencie $r = \infty$ a rad konverguje na celom R.

Veta o derivovaní. *Ak mocninový rad konverguje na intervale* $(x_0 - r, x_0 + r)$ *a*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \,(x - x_0)^n,$$

tak

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n \,(x - x_0)^{n-1},$$

a tento rad tiež konverguje na intervale $(x_0 - r, x_0 + r)$.

To znamená, že súčet mocninového radu je nekonečne veľa krát diferencovateľná funkcia na intervale $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Príklad 6. Vypočítajme súčet radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(x-2)^n.$$

Riešenie.

Z príkladu 4 už vieme, že rad konverguje na intervale $(1, 3)$.

Vezmime na tomto intervale rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n.$$

To je ale geometrický rad a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n = \frac{1}{3-x}.$$

Derivovaním radu dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(x-2)^{n-1} = \frac{1}{(3-x)^2}.$$

Prenásobením $(x-2)$ a pridaním nultého člena dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,(x-2)^n = \frac{x-2}{(3-x)^2}.$$

Taylorov rad.

Uvažujme o mocninovom rade

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x - x_0)^n,$$

ktorý má kladný polomer konvergencie $r > 0$.

Jeho súčet je funkcia premennej x

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n \, (x - x_0)^n + \dots$$

definovaná na intervale $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Aký je vzťah medzi funkciou f a koeficientami c_n jej mocninového radu?

Ak za premennú x dosadíme stred intervalu konvergencie, číslo x_0, tak všetky zátvorky typu $(x - x_0)^n$ vynulujeme a dostaneme

$$f(x_0) = c_0.$$

Pre 1. deriváciu f' je

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n \, (x-x_0)^{n-1} = c_1+2c_2(x-x_0)+3c_3(x-x_0)^2+\cdots+nc_n \, (x-x_0)^{n-1}+\dots$$

V bode x_0 je

$$f'(x_0) = c_1.$$

Pre 2. deriváciu f'' je

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n \, (x-x_0)^{n-2} = 2c_2+3\cdot 2c_3(x-x_0)+4\cdot 3c_4(x-x_0)^2+\cdots+n(n-1)c_n \, (x-x_0)^{n-2}+\dots$$

V bode x_0 je

$$f''(x_0) = 2c_2.$$

Rovnako dostaneme

$$f'''(x_0) = 3 \cdot 2c_3,$$

a všeobecne

$$f^{[n]}(x_0) = n!c_n.$$

To znamená, že n-tý koeficient v mocninovom rade so stredom v bode x_0 pre funkciu f je

$$c_n = \frac{f^{[n]}(x_0)}{n!}.$$

Teda ak f je súčtom mocninového radu so stredom v bode x_0, tak je to rad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{[n]}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{[n]}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n+\ldots$$

Definícia. Nech funkcia $f : I \to R$ má všetky derivácie a nech $x_0 \in I$. Rad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{[n]}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n$$

nazývame Taylorov rad funkcie f so stredom v bode x_0.

Príklad 7. Majme rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,x^n.$$

Je to rad so stredom v bode $x_0 = 0$.
Pretože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

jeho polomer konvergencie je $r = \infty$.
Nazvime jeho súčet ako $exp(x)$.
Zrejme $exp(0) = 1$.
Ľahko spočítame, že

$$exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots \frac{1}{n!} + \ldots.$$

Súčty na pravej strane sú postupne 2, 2.5, 2,666, ... Limitnú hodnotu označíme písmenom e a je $2,71$....

Dá sa overiť, že funkcia $exp(x)$ má všetky vlastnosti exponenciálnej funkcie a je

$$\exp(x) = e^x.$$

Teraz aj môžeme overiť, že

$$exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}\,x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}\,x^{n-1}.$$

Ak označíme $n - 1 = m$, tak dostaneme

$$exp'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\,x^m.$$

To je ale zase funkcia $exp(x)$, preto

$$exp'(x) = exp(x).$$

Rad z nášho príkladu je Taylorov rad funkcie, ktorú označujeme ako e^x a vieme z neho overiť všetky jej vlastnosti.