Prednáška 20.

Integrovanie racionálnych funkcií

V predchádzajúcich prednáškach o substitučnej metóde sme si mohli všimnúť, že sme často postupovali tak, aby sme sa použitím vhodnej substitúcie dostali k integrálu z racionálnej funkcie. Je to vždy úspešná stratégia?

Odpoveď je áno. V tejto kapitole ukážeme, že každú racionálnu funkciu vieme integrovať použitím elementárnych funkcií.

Predvedieme jednoznačný postup pre integrovanie racionálnych funkcií.

Pripomeňme si niektoré vedomosti o racionálnych funkciách z algebry.

Predovšetkým, každú racionálnu funkciu vieme delením polynómov previesť na súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie.

Rýdzoracionálu funkciu vieme rozložiť na súčet elementárnych zlomkov. V tomto kurze použijeme rozklad nad R. (*Rozklad bez použitia komplexných čísel.*)

Pre integrovanie racionálnych funkcií teda stačí vedieť integrovať polynómy a jednotlivé typy elementárnych zlomkov. To si v nasledujúcich krokoch predvedieme.

1. Integrovanie polynómu.

Pre integrovanie polynómu stačí elementárny vzorec

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}.$$

2. Integrovanie elementárnych zlomkov typu $\frac{1}{x-a}$.

Zlomky tohoto typu sa v rozklade racionálnej funkcie objavia ak číslo a je koreňom polynómu v menovateli.

Použijeme elementárny výsledok

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a|.$$

Príklad 1.

Vypočítajme

$$\int \frac{x^2}{x-1}\,dx.$$

Riešenie.

Podeľme

$$x^2 : (x-1) = x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Potom

$$\int \frac{x^2}{x-1}\,dx = \int x + 1 + \frac{1}{x-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + c.$$

Príklad 2.

Vypočítajme

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx.$$

Riešenie.

Podeľme

$$x^2 : (x^2-1) = 1 + \frac{1}{x^2-1}.$$

Rozkladom na elementárne zlomky dostaneme

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

Potom

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int 1 + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx =$$

$$= x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c.$$

3. Integrovanie elementárnych zlomkov typu $\frac{1}{(x-a)^n}$.

Zlomky tohoto typu sa v rozklade racionálnej funkcie objavia ak číslo a je n násobným koreňom polynómu v menovateli.

Pre $n \geq 2$ použijeme elementárny výsledok

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{(x-a)^{(n-1)}}.$$

Príklad 3.

Vypočítajme

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^2}\,dx.$$

Riešenie.

Podeľme

$$x^2 : (x-1)^2 = 1 + \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

Rozkladom na elementárne zlomky dostaneme

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Potom

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^2}\,dx = \int 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = x + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c.$$

4. Integrovanie elementárnych zlomkov typu $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$.

Predpokladáme, že kvadratický polynóm v menovateli zlomku je už nerozložiteľný nad R, teda že $p^2 < 4q$.

Postup pri integrovaní predvedieme na sérii príkladov, ktoré sa postupne sťažujú. (Nevedno na čo...)

Príklad 4.

Vypočítajme
$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx.$$

Riešenie.

Pretože čitateľ v racionálnej funkcii je presne deriváciou menovateľa, je
$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx = \ln(x^2+4x+8)+c.$$

Príklad 5.

Vypočítajme
$$\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx.$$

Riešenie.

V menovateli použijeme doplnenie na úplný štvorec
$$x^2+4x+8 = x^2+4x+4+4 = (x+2)^2+2^2.$$

Spolu so substitúciou $y = x+2$ dostaneme
$$\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+2^2}\,dx = \int \frac{1}{y^2+2^2}\,dy = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{y}{2}+c = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{2}+c.$$

Príklad 6.

Vypočítajme
$$\int \frac{x}{x^2+4x+8}\,dx.$$

Riešenie.

Čitateľ racionálnej funkcie upravíme tak, aby obsahoval deriváciu menovateľa
$$x = \frac{1}{2}\cdot 2x = \frac{1}{2}\cdot(2x+4-4) = \frac{1}{2}\cdot(2x+4)-2.$$

Preto
$$\int \frac{x}{x^2+4x+8}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot(2x+4)-2}{x^2+4x+8}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx.$$

Teraz stačí na jednotlivé sčítance použiť výsledky príkladov 4 a 5, aby sme dostali

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+8) - \operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + c.$$

Príklad 7.
Vypočítajme

$$\int \frac{x^2}{2x^2+3x+5}\,dx.$$

Riešenie.
Delením dostaneme

$$x^2 : (2x^2+3x+5) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3x+5}{2x^2+3x+5}$$

Preto

$$\int \frac{x^2}{2x^2+3x+5}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \frac{3x+5}{2x^2+3x+5}\,dx.$$

Upravíme čitateľa

$$3x+5 = \frac{3}{4}\left(4x+\frac{20}{3}\right) = \frac{3}{4}\left(4x+3+\frac{11}{3}\right).$$

Teraz

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \frac{3x+5}{2x^2+3x+5}\,dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \frac{\frac{3}{4}\left(4x+3+\frac{11}{3}\right)}{2x^2+3x+5}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}\int \frac{4x+3}{2x^2+3x+5}\,dx - \frac{11}{8}\int \frac{1}{2x^2+3x+5}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}\ln(2x^2+3x+5) - \frac{11}{8}\int \frac{1}{2x^2+3x+5}\,dx.\end{aligned}$$

Nakoniec po úprave menovateľa

$$2x^2+3x+5 = 2(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}) = 2(x^2+2\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}+\frac{31}{16}) = 2\left((x+\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}\right)$$

dostaneme

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}x - \frac{3}{8}\ln(2x^2+3x+5) - \frac{11}{8}\int \frac{1}{2x^2+3x+5}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}\ln(2x^2+3x+5) - \frac{11}{16}\int \frac{1}{(x+\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}}\,dx = \\ &\frac{1}{2}x - \frac{3}{8}\ln(2x^2+3x+5) - \frac{11}{16}\sqrt{\frac{16}{31}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{31}{16}}} + c = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}\ln(2x^2+3x+5) - \frac{11}{4\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{31}} + c.\end{aligned}$$

Vo všeobecnom prípade je

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p+\frac{2B}{A}-p}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{A}{2}\int \frac{\frac{2B}{A}-p}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + c =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c.$$

5. Integrovanie elementárnych zlomkov typu $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$.

Tu nebudeme postupovať všeobecne, predvedieme hlavnú myšlienku na najjednoduchšom príklade

Príklad 8.
Vypočítajme

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Riešenie.
Vieme, že

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

Počítajme integrál na pravej strane poslednej rovnosti metódou per partes, pri voľbe

$$f' = 1, \qquad f = x$$

$$g = \frac{1}{x^2+1} \qquad g' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Dostaneme

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Teda

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{x^2+1} + 2\operatorname{arctg} x - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Preto

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x\right) + c.$$

Touto rekurentnou technikou sa počítajú aj integrály elementárnych zlomkov s vyššími mocninami nerozložiteľného kvadratického polynómu v menovateli.

Súhrnom môžeme konštatovať, že pre každú racionálnu funkciu vieme nájsť jej primitívnu funkciu. Táto je vyjadrená pomocou racionálnych funkcií, funkcie logaritmus a funkcie arkustangens.