Prednáška 18.

Substitučná metóda

Pri metóde per partes sme vyšli zo vzťahu pre deriváciu súčinu, teraz začneme naše úvahy vzťahom pre deriváciu zloženej funkcie.

Označme vnútornú zložku ako funkciu φ.

$$\varphi : I \to J \qquad \varphi(x) = y.$$

Vonkajšia zložka bude označená ako F

$$F : J \to R.$$

Predpokladajme, že obe funkcie sú diferencovateľné. Deriváciu funkcie F označme $F'(y) = f(y)$.

Derivujme zloženú funkciu $F \circ \varphi$.

$$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = F'(y) \cdot \varphi'(x) = f(y) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Ak teraz hľadáme primitívnu funkciu k funkcii $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, teda

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx,$$

tak stačí poznať primitívnu funkciu k f,

$$\int f(y)\, dy = F(y),$$

pretože

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int f(y)\, dy = F(y) = F(\varphi(x)) + c.$$

Veta(o substitučnej metóde I). *Nech $\varphi : I \to J$ je diferencovateľná funkcia $f : J \to R$ je spojitá funkcia a nech $F : J \to R$ je primitívna funkcia k f. Potom*

$$\int f(\varphi(x))\ \varphi'(x)\, dx = \int f(y)\, dy = F(y) + c = F(\varphi(x)) + c$$

Hovoríme, že sme použili substitúciu, v ktorej sme funkciu $\varphi(x)$ nahradili premennou y, $y = \varphi(x)$. Prírastok funkcie $\varphi(x)$, jej prvý diferenciál je $\varphi'(x)\, dx$ rovný prírastku premennej y, $dy = \varphi'(x)\, dx$.

Predveďme použitie vety o substitúcii v príkladoch.

Príklad 1. Vypočítajme

$$\int \sin(x + 3)\, dx.$$

Riešenie. Použijeme substitúciu

$$y = x + 3, \qquad dy = 1dx.$$

Teraz

$$\int \sin(x+3)\,dx = \int \sin(y)\,dy = \cos(y) = \cos(x+3) + c.$$

Príklad 2. Vypočítajme

$$\int \frac{1}{3x-2}\,dx.$$

Riešenie. Použijeme substitúciu

$$y = 3x - 2, \qquad dy = 3dx.$$

Teraz

$$\int \frac{1}{3x-2}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln y = \ln(3x-2) + c.$$

Príklad 3. Vypočítajme

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx.$$

Riešenie. Upravme zlomok

$$\frac{1}{x^2-1}$$

rozkladom na súčet elementárnych zlomkov

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}.$$

Máme

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx.$$

Teraz v prvom integráli použijeme substitúciu

$$y = x - 1, \qquad dy = dx,$$

a v druhom substitúciu

$$z = x + 1, \qquad dz = dx.$$

Po nej je

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy + \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2}\ln|y| + \frac{1}{2}\ln|z| = \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c.\end{aligned}$$

Príklad 4. Vypočítajme
$$\int \frac{e^x}{e^x+2}\,dx.$$

Riešenie. Použijeme substitúciu
$$y = e^x + 2, \qquad dy = e^x\,dx, .$$

Po nej
$$\int \frac{e^x}{e^x+2}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| = \ln|e^x+2| + c.$$

V predošlých príkladoch môžeme vypozorovať jednotný princíp, ktorý sformulujeme v nasledujúcom tvrdení.

Veta. *Nech $\varphi : I \to J$ je diferencovateľná funkcia. Potom*
$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \ln|\varphi(x)| + c.$$

Príklad 5. Vypočítajme
$$\int \operatorname{cotg} x\,dx.$$

Riešenie. Pretože
$$\int \operatorname{cotg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin(x)| + c.$$

Príklad 6. Vypočítajme
$$\int \operatorname{tg} x\,dx.$$

Riešenie. Pretože
$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos(x)| + c.$$

Príklad 7. Vypočítajme
$$\int \operatorname{arctg} x\,dx.$$

Riešenie. Použijeme najprv metódu per partes pre
$$f'(x) = 1, \qquad g(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Potom
$$f(x) = x, \qquad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx =$$
$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c.$$

Príklad 8. Vypočítajme
$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx.$$

Riešenie.
$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}\,dx.$$

Po substitúcii
$$y=\frac{x}{2},\qquad dy=\frac{1}{2}\,dx,$$
$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+c.$$

Výsledok príkladu 8 vieme zovšeobecniť do vzorca
$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c.$$

Príklad 9. Vypočítajme
$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx.$$

Riešenie.
$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx.$$

Po substitúcii
$$y=x+1,\qquad dy=dx,$$
$$\int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx = \int \frac{1}{y^2+4}\,dy = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{(x+1)}{2}+c.$$

Príklad 10. Vypočítajme
$$\int \frac{3x+4}{x^2+2x+5}\,dx.$$

Riešenie.
Postupne upravíme zlomok tak, aby sme mohli použiť predchádzajúci príklad.
$$\int \frac{3x+4}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{8}{3}}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2+\frac{2}{3}}{x^2+2x+5}\,dx =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx + \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx =$$
$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{(x+1)}{2}+c.$$