Prednáška 1.

Úvod.

Obsahom predmetu Matematika 1 je štúdium vlastností funkcie jednej premennej. Podľa povahy týchto vlastností a podľa použitých metematických techník delíme študovanú látku do dvoch častí. Prvá sa volá diferenciálny počet, druhá integrálny počet.

Funkciu jednej premennej si geometricky vieme (zjednodušene) predstaviť ako čiaru. Budeme teda hovoriť o vlastnostiach čiary. Aj keď sa v historickom vývoji matematiky pojem funkcie a jej geometrického znázornenia postupne od seba vzdialil, pre naše účely je predstava čiary celkom užitočná.

Čiary predstavujúce funkcie budeme mať umiestnené v rovine obsahujúcej dve na seba kolmé priamky - súradné osi. Označíme ich postupne x a y. Ich priesečník je bod nula na každej z osí. Každú priamku vieme stotožniť s množinou reálnych čísel R. Označenie osí je zvolené tak, aby sa kladná časť osi x otočením o 90 proti smeru hodinových ručičiek zobrazila na kladnú časť osi y.

(*Zvykneme kresliť os x vodorovne a os y zvisle.*)

Každý bod v rovine je jednoznačne určený usporiadanou dvojicou čísel, súradníc $[x, y]$.

Zobrazenie, ktoré zvolenej súradnici x priradí druhú súradnicu y tak, aby bod ležal na čiare, je zárodkom definície reálnej funkcie.

Definícia reálnej funkcie.

V skutočnosti ale náš postup obrátime. Nezačneme čiarou, ku ktorej hľadáme priradenie, ale naopak začneme priradením, od ktorého budeme požadovať rozumné vlastnosti a potom sa pozrieme, aká čiara týmto priradením vznikne.

Zobrazenie s požadovanými vlastnosťami budeme volať reálna funkcia a značiť najčastejšie písmenom f.

Definícia. Nech $A \subset R$, $B \subset R$. Zobrazenie f, ktoré každému $x \in A$ priradí jediné $y \in B$ nazývame reálna funkcia.

Definícia hovorí, že reálna funkcia je trojica, množina A (na osi x), množina B (na osi y) a predpis f.

Pritom predpis f sa musí dať použiť pre každé číslo $x \in A$ (čítame x z A.) A to naviac jednoznačným spôsobom.

Množinu A nazývame definičný obor a značíme D_f.

Niekedy je miesto trojice uvedený len predpis f.

Množinu B vtedy považujeme za celú množinu reálnych čísel, $B = R$. S množinou A je to ťažšie.
Ak v úlohe nie je zadaný definičný obor, považujeme za D_f najväčšiu množinu, na ktorej má funkčný predpis f zmysel.

Príklad 1. Nájdime definičný obor funkcie f.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-9}}.$$

Riešenie. Zlomok je dobre definovaný (má zmysel), keď je menovateľ

$$x^2 - 9 \neq 0.$$

Teda $x \neq 3$ a tiež $x \neq -3$.

Odmocnina je dobre definovaná, keď číslo ktoré odmocňujeme je nezáporné. Teda

$$\frac{x+1}{x^2-9} \geq 0.$$

Uvažujeme dve možnosti, buď je čitateľ nezáporný a menovateľ kladný, alebo je čitateľ nekladný a menovateľ záporný.

Prvá možnosť dáva $x \in (3, \infty)$ a druhá $x \in (-3, -1]$.

Teda

$$D_f = (3, \infty) \cup (-3, -1].$$

Poznamenajme, že najčastejšie budeme uvažovať o funkciách, ktorých definičný obor je interval, alebo zjednotenie konečného počtu intervalov.

Uvedieme teraz niekoľko príkladov reálnych funkcií. Na týchto príkladoch ukážeme niektoré používané pojmy.

Príklad 2. Vezmime funkciu $f : R \to R$ s predpisom

$$f(x) = 3x - 2.$$

Zrejme jej definičný obor je $D_f = R$.

Množinu bodov so súradnicami $[x, y]$, kde $y = f(x)$ nazývame graf funkcie f. V tomto príklade je grafom funkcie priamka (nakreslite ju).

Ľahko zistíme, že každá hodnota y sa vyskytuje v nejakom bode grafu ako druhá súradnica bodu, inak povedané na každú hodnotu y sa zobrazí funkciou f nejaké x. Dokonca také x je práve jedno, a to $x = \frac{y+2}{3}$. Hovoríme, že obor hodnôt funkcie f je celá množina R.

Definícia. Nech $f : A \to B$.

Množinu

$$G_f = \{[x, f(x)]; \quad x \in A\}$$

nazývame grafom reálnej funkcie f.

Definícia. Nech $f : A \to B$.

Množinu

$$H_f = \{y \in B; \text{ pre ktoré existuje také } x \in A, \text{ že } y = f(x)\}$$

nazývame oborom hodnôt reálnej funkcie f.

Príklad 3. Vezmime funkciu $f : R \to R$ s predpisom

$$f(x) = x^2.$$

Zase, jej definičný obor je $D_f = R$.

Jej grafom je parabola

$$y = x^2.$$

Teraz ale nie je pravda, že pre každé $y \in R$ nájdeme x také, že $y = x^2$. Oborom hodnôt funkcie f nie je celá množina R.

Zrejme je $H_f = [0, \infty)$. (Množinu $[0, \infty)$ zvykneme značiť ako R_0^+.)

Tiež pre kladné čísla $y \in H_f$ nie je pravda, že by boli obrazom práve jedného x z D_f. (Napríklad pre $y = 4$ je $f(x) = 4$ ak $x = 2$, ale aj ak $x = -2$.

Príklad 4. Vezmime funkciu $g : R_0^+ \to R_0^+$ s predpisom

$$g(x) = x^2.$$

Oproti predchádzajúcemu príkladu sme nezmenili funkčný predpis, ale zmenili sme množiny A a B.

Definičný obor je teraz $D_g = R_0^+$.

Grafom je časť paraboly $y = x^2$ ležiaca v pravej polrovine.

Oborom hodnôt funkcie g je celá množina $B = R_0^+$.

A naviac každé $y \in H_g$ je obrazom práve jedného x z D_g.

Hovoríme, že funkcia g z príkladu 4 je zúženie funkcie f z príkladu 3.

Príklad 5. Uvažujme znamienkovú funkciu signum, ktorú značíme sgn $: R \to R$. Daná je predpisom

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 \text{ pre } x > 0, \\ 0 \text{ pre } x = 0, \\ -1 \text{ pre } x < 0. \end{cases}$$

(Slovne popísané, funkcia má hodnotu 1 pre kladné čísla x, hodnotu -1 pre záporné čísla x a hodnotu 0 pre nulu.)

Definičný obor je $D_f = R$.

Oborom hodnôt funkcie f je množina $H_f = \{-1, 0, 1\}$.

Definícia. Funkciu $f : A \to B$ nazývame

- injektívna, ak $\forall x_1, x_2 \in A$ platí $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. (Rôzne „iksy" sa zobrazia na rôzne „ypsilony".)
- surjektívna, ak $\forall y \in B$ existuje také $x \in A$, že $y = f(x)$. (Obor hodnôt je celá množina B.)
- bijektívna, ak je injektívna a súčasne surjektívna.

Pri pohľade na predchádzajúce príklady vidíme, že funkcia z príkladu 2 je bijektívna, funkcia z príkladu 3 nie je ani injektívna ani surjektívna. Jej zúženie z príkladu 4 je ale bijektívna funkcia.

Funkcia z príkladu 5 nie je injektívna a ani nemá rozumné zúženie na injektívnu funkciu.

Poznamenajme, že z každej funkcie sa dá voľbou množiny B urobiť surjektívna funkcia.

Zložená a inverzná funkcia.

Predstavme si, že reálne číslo x zobrazíme pomocou funkcie f na $y = f(x)$. Nové číslo y môžeme ďalšou funkciou g zobraziť na číslo $z = g(y)$. Opakované zobrazenie je podstatou pojmu zložená funkcia.

Príklad 6. Uvažujme funkciu $f : R \to R$ danú predpisom

$$f(x) = 1 - 3x,$$

a funkciu $g : R \to R$ danú predpisom

$$g(x) = |x| + 1.$$

Ak zvolíme napríklad $x = 1$, tak $f(1) = 1 - 3 = -2$. Teraz môžeme $y = -2$ zobraziť pomocou funkcie g. Dostaneme $g(-2) = |-2| + 1 = 3$.

Všimnime si, že ak vložíme predpis pre funkciu f do funkcie g, teda $g(1-3x) = |1-3x|+1$, vytvoríme novú funkciu - nazvime ju h - s predpisom $h(x) = |1-3x|+1$, ktorá pracuje rovnako, ako postupné zobrazenie funkciou f a následne zobrazenie výsledku funkciou g.

Novú funkciu h nazveme zložená funkcia.

Definícia. Nech funkcia $f : A \to B$ a funkcia $g : B \to C$.

Funkciu $h : A \to C$ danú predpisom

$$h(x) = g(f(x))$$

nazývame zložená funkcia z funkcií f a g.
Značíme aj $h = g \circ f$.

Ak v predošlom príklade 6 skúsime použiť funkcie f a g v opačnom poradí, dostaneme pre $x = 1$ $g(1) = |1| + 1 = 2$. Následne $f(2) = 1 - 3 \cdot 2 = -5$.

Výsledok teda závisí od poradia, v ktorom funkcie f a g použijeme.

Vo všeobecnosti

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Príklad 7. Uvažujme funkciu $f : R \to R$ danú predpisom

$$f(x) = 1 - 3x,$$

a funkciu $g : R \to R$ danú predpisom

$$g(x) = \frac{1-x}{3}.$$

Zložená funkcia

$$g(f(x)) = \frac{1-(1-3x)}{3} = x.$$

A v opačnom poradí

$$f(g(x)) = 1 - 3\frac{1-x}{3} = x.$$

V tomto príklade na poradí skladania nezáleží.

Naviac východzie číslo x sa po zobrazení pomocou f zobrazilo na y a toto y sa funkciou g zobrazilo naspäť na x. Rovnako pri zobrazení v opačnom poradí dostaneme ako výsledok pôvodné číslo.

Takéto dve funkcie sa nazývajú inverzné.

Definícia. Nech funkcia $f : A \to B$ je bijektívna. Funkciu $g : B \to A$, pre ktorú platí

$$g(f(x)) = x, \text{ pre každé } x \in A$$

a súčasne

$$f(g(y)) = y, \text{ pre každé } y \in B$$

nazývame inverzná funkcia k funkcii f.
Značíme $g = f^{-1}$

Pretože na grafe funkcie f ležia body $[x, f(x)] = [x, y]$ a na grafe inverznej funkcie body $[y, g(y)] = [y, x]$, sú grafy inverzných funkcií symetrické podľa osi 1. a 3. kvadrantu (priamky $y = x$).

Párna a nepárna funkcia

Množinu A nazveme symetrická, ak s každým $x \in A$ je aj $-x \in A$.

Definícia. Nech A je symetrická množina. Reálnu funkciu $f : A \to B$ nazývame:
- párna, ak $\forall x \in A;\ f(-x) = f(x)$,
- nepárna, ak $\forall x \in A;\ f(-x) = -f(x)$.

Graf párnej funkcie je súmerný podľa osi y, graf nepárnej funkcie je sredovo súmerný podľa počiatku súradnej sústavy.

Príklad 8. Funkcia $f : A \to R$
- $f(x) = 1$ je párna.
- $f(x) = x$ je nepárna.
- $f(x) = x^2$ je párna.
- $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ je párna.
- $f(x) = \frac{1}{x-1}$ nie je ani párna ani nepárna.

Funkcia $f(x) = x^n$, pre $n \in N$ je párna, práve vtedy, keď n je párne číslo a nepárna, práve vtedy, keď n je nepárne číslo.

Súčet a súčin párnych funkcií je párna funkcia. Rovnako súčin nepárnych funkcií je párna funkcia. Súčet nepárnych funkcií je nepárna funkcia. Súčin nepárnej a párnej funkcie je nepárna funkcia.

Čo viete povedať o súčte párnej a nepárnej funkcie?