ALGEBRA A ANALYTICKÁ GEOMETRIA

RNDr. Peter Kaprálik, PhD.
KM FEI STU, Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava
20. 3. 2003

1. Polynómy

Základné pojmy.

Definícia 1.1. Nech $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$. Funkciu

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C},\ f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

nazývame *komplexný polynóm komplexnej premennej* x (stručne ho budeme nazývať len polynóm). Čísla a_0, a_1, …, a_n sú *koeficienty* polynómu f a výrazy $a_k x^k$ pre $k \in \{0, 1. \ldots, n\}$ sú *členy* polynómu f, špeciálne a_0 je *absolútny člen.*
Polynóm $g : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, $g(x) = 0$ nazývame *nulový polynóm* a budeme ho označovať $\mathbf{0}$.

Poznámka 1.1. Keďže definičný obor aj koobor polynómov je vždy množina $\mathbf{C}$, budeme namiesto dlhého zápisu (1) používať kratší:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

alebo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

alebo

$$f(x)$$

alebo

$$f$$

Množinu všetkých komplexných polynómov premennej x budeme označovať $P(\mathbf{C})$ a množinu všetkých polynómov s reálnymi koeficientami $P(\mathbf{R})$. Prvky množiny $P(\mathbf{R})$ budeme tiež nazývať *reálne polynómy.*
Je zrejmé, že $P(\mathbf{R}) \subset P(\mathbf{C})$.

Súčet $f + g$, *rozdiel* $f - g$ a *súčin* fg polynómov f, g definujeme štandardne, tak ako sú tieto binárne operácie definované pre funkcie, teda

$$f + g : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C},\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$f - g : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C},\ (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$fg : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C},\ (fg)(x) = f(x)g(x)$$

Príklad 1.1. Určte $f + g$, $f - g$, fg, ak $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$.

Riešenie

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x - 1) + (x^2 + x + 1) = x^2 + 2x$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x - 1) - (x^2 + x + 1) = -x^2 - 2$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$$

■

Poznámka 1.2. Súčet, rozdiel a súčin dvoch polynómov je opäť polynóm.

Rovnosť polynómov definujeme ako rovnosť funkcií. Keďže polynómy majú rovnaké definičné obory, môžeme povedať, že dva polynómy f, g sú rovnaké a píšeme $f = g$, ak $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \mathbf{C}$.

Veta 1.1. Nech $f(x) = a_sx^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_1x + a_0$, $a_s \neq 0$ a $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{s-1}|\}$. Potom pre každé komplexné číslo z, ktoré vyhovuje podmienke $|z| > 1 + \frac{M}{|a_s|}$, je $f(z) \neq 0$.

Dôkaz

Pre každé komplexné číslo x platí

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |a_sx^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_1x + a_0| \geq |a_sx^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_1x| - |a_0| \geq \\
&\geq |a_sx^s| - |a_{s-1}x^{s-1}| - \cdots - |a_1x| - |a_0| = |a_s||x|^s - |a_{s-1}||x|^{s-1} - \cdots - |a_1||x| - |a_0| = \\
&= |a_s||x|^s - (|a_{s-1}||x|^{s-1} + \cdots + |a_1||x| + |a_0|) \geq |a_s||x|^s - (M|x|^{s-1} + \cdots + M|x| + M) = \\
&= |a_s||x|^s - M(|x|^{s-1} + \cdots + |x| + 1)
\end{aligned}$$

Pre komplexné čísla z, ktoré spĺňajú podmienku $|z| > 1 + \frac{M}{|a_s|}$ ďalej platí

$$|f(z)| \geq |a_s||z|^s - M(|z|^{s-1} + \cdots + |z| + 1) = |a_s||z|^s - M\frac{|z|^s - 1}{|z| - 1} = |a_s||z|^s - \frac{M}{|z| - 1}(|z|^s - 1)$$

Z podmienky $|z| > 1 + \frac{M}{|a_s|}$ vyplýva $\frac{M}{|z|-1} < |a_s|$, a preto

$$|f(z)| > |a_s||z|^s - |a_s|(|z|^s - 1) = |a_s| > 0$$

Absolútna hodnota čísla $f(z)$ je kladná, čo znamená, že $f(z) \neq 0$.

□

Veta 1.2. Polynóm $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ je nulový vtedy a len vtedy, keď $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Dôkaz (nepriamo)

Predpokladajme, že niektorý z koeficientov polynómu f je rôzny od nuly. Označme s najväčšie číslo $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, pre ktoré $a_k \neq 0$. Potom $f(x) = a_sx^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_1x + a_0$, pričom $a_s \neq 0$, a podľa predchádzajúcej vety existuje komplexné číslo z, pre ktoré $f(z) \neq 0$. To je však v spore s tým, že f je nulový polynóm.

□

Veta 1.3. Dva polynómy

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,\ a_n \neq 0, \\
g(x) &= b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0,\ b_m \neq 0
\end{aligned}$$

sú rovnaké práve vtedy, keď $n = m$, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

Dôkaz

Polynómy f a g sú rovnaké práve vtedy, keď polynóm $f - g$ je nulový. To nastane práve vtedy, keď $a_0 - b_0 = 0$, $a_1 - b_1 = 0, \ldots$, čiže keď $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots$ a vtedy samozrejme $n = m$.

□

Definícia 1.2. *Stupňom polynómu* $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, ktorého aspoň jeden koeficient je nenulový, nazývame číslo

$$\mathrm{st}(f) = \max\{k \in \{0, 1, \ldots, n\};\ a_k \neq 0\}$$

Príklad 1.2. Nech $h(x) = 0x^5 + 2x^4 + 5x - 1$, potom $\mathrm{st}(h) = 4$

■

Polynóm stupňa s môžeme písať v tvare

$$f(x) = a_sx^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_1x + a_0,\ a_s \neq 0$$

(koeficienty a_k pre $k > s$ sú nulové, preto členy s týmito koeficientami netreba písať). Tento tvar nazývame *normálny tvar* polynómu f. Koeficient a_s nazývame *najvyšší koeficient*, člen a_sx^s *najvyšší člen* polynómu f.

Polynómy nultého stupňa a nulový polynóm nazývame *konštantné polynómy*, polynómy prvého stupňa - *lineárne polynómy*, polynómy druhého stupňa - *kvadratické polynómy* a polynómy tretieho stupňa - *kubické polynómy*.

Uvedomme si, že nemáme definovaný stupeň nulového polynómu. Tento nedostatok môžeme odstrániť takto:

Definícia 1.3. Stupňom nulového polynómu nazývame symbol $-\infty$.

Stupne nenulových polynómov sú prirodzené čísla, ktoré vieme sčitovať a porovnávať. Aby to bolo možné aj so stupňom nulového polynómu, dohodnime sa, že pre všetky $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

$$
\begin{aligned}
&-\infty + n = n + (-\infty) = -\infty \\
&-\infty + (-\infty) = -\infty \\
&-\infty < n
\end{aligned}
$$

Veta 1.4. Pre každé dva polynómy $f, g \in P(\mathbf{C})$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{st}(f+g) \leq \max\{\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g)\} \\
&\mathrm{st}(fg) = \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g)
\end{aligned}
$$

Dôkaz

Nech

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0, \\
g(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,\ b_m \neq 0
\end{aligned}
$$

sú nenulové polynómy, potom $\mathrm{st}(f) = n$ a $\mathrm{st}(g) = m$. Vzhľadom k tomu, že

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &= [a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0][b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0] = \\
&= a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m)x^{n+m-1} + \cdots + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + a_0 b_0,\ a_n b_m \neq 0,
\end{aligned}
$$

$\mathrm{st}(fg) = nm = \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g)$.

Pre čísla m, n platí práve jedna z možností: $m = n$ alebo $m < n$ alebo $m > n$. Povedzme, že $n \geq m$ (v opačnom prípade by sme postupovali analogicky). Ak položíme $b_k = 0$ pre $m < k \leq n$, tak $g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ a

$$
f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0
$$

V prípade, že $n > m$ je $a_n + b_n = a_n + 0 = a_n \neq 0$ a $\mathrm{st}(f+g) = n = \mathrm{st}(f)$.
Ak $n = m$ a $a_n \neq -b_n$, tak $a_n + b_n \neq 0$ a $\mathrm{st}(f+g) = n = \mathrm{st}(f)$.
Ak $n = m$ a $a_n = -b_n$, tak $a_n + b_n = 0$ a $\mathrm{st}(f+g) < n = \mathrm{st}(f)$
Vo všetkých troch prípadoch platí $\mathrm{st}(f+g) \leq \max\{\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g)\}$.

Ostáva ešte overiť prípad, keď niektorý polynóm je nulový. Nech napríklad g je nulový polynóm. Potom

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) = f(x) \cdot 0 = 0,\ \mathrm{st}(fg) = -\infty = n + (-\infty) = \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g) \\
f(x) + g(x) = f(x) + 0 = f(x),\ \mathrm{st}(f+g) = \mathrm{st}(f) \leq \max\{\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g)\}
\end{aligned}
$$

□

Delenie polynómov so zvyškom.

Príklad 1.3. Zistite, či k polynómom $f(x) = 1,\ g(x) = x + 1$ existuje polynóm h tak, aby $f = gh$.

Riešenie

Pre polynóm h má platiť: $1 = (x+1)h(x)$, odkiaľ pre stupne vyplýva

$$
\mathrm{st}(gh) = \mathrm{st}(x+1) + \mathrm{st}(h) = 1 + \mathrm{st}(h) = \begin{cases} 1 + (-\infty) = -\infty,\ \text{ak } \mathrm{st}(f) = -\infty \\ 1 + n,\ \text{ak } \mathrm{st}(f) = n > -\infty \end{cases}
$$

V oboch prípadoch $\mathrm{st}(gh) \neq \mathrm{st}(f) = 0$. Znamená to, že požadovaný polynóm h neexistuje.

■

V predchádzajúcom príklade sme videli, že podiel polynómov f, g je funkcia, ktorá nie je polynóm. Podobná situácia je pri delení celých čísel. Tu tiež podiel celých čísel nemusí byť celé číslo. Avšak existuje tu delenie celých čísel so zvyškom. Nasledujúca veta hovorí, že delenie so zvyškom je možné zaviesť aj pre polynómy.

Veta 1.5. Ku každým dvom polynómom $f, g \in P(\mathbf{C})$, $g \neq \mathbf{0}$, existujú také polynómy $q, r \in P(\mathbf{C})$, že

1. $f = gq + r$,
2. $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(g)$.

Podmienkami 1 a 2 sú polynómy q, r jednoznačne určené.

$\square$

Poznámka 1.3. Polynóm q z predchádzajúcej vety sa nazýva *podiel* a polynóm r *zvyšok* po delení polynómu f polynómom g.

Príklad 1.4. Vydeľte polynóm $(1-2i)x^2 + 3x - 2 + i$ polynómom $4ix^3 + (-1+2i)x - 4$.

Riešenie

Keďže pre tieto polynómy platí

$$(1-2i)x^2 + 3x - 2 + i = [4ix^3 + (-1+2i)x - 4]0 + (1-2i)x^2 + 3x - 2 + i$$

a

$$\mathrm{st}((1-2i)x^2 + 3x - 2 + i) < \mathrm{st}(4ix^3 + (-1+2i)x - 4)$$

tak podielom je nulový polynóm a zvyšok je $(1-2i)x^2 + 3x - 2 + i$.

$\blacksquare$

Algoritmus na výpočet podielu a zvyšku si ukážeme na konkrétnom príklade.

Príklad 1.5. Vydeľte so zvyškom polynóm $f(x) = 5x^5 - x^4 + 2x^3 + ix - 2i$ polynómom $g(x) = x^2 + x + 1$.

Riešenie

Výpočet podielu q a zvyšku r je takýto: Vydelíme najvyšší člen polynómu f najvyšším členom polynómu g a dostaneme prvý člen podielu q. Vynásobme ho polynómom g a tento súčin odčítajme od polynómu f. Dostaneme polynóm f_1 stupňa menšieho ako $\mathrm{st}(f)$. Zapísať to môžeme takto:

$$\begin{array}{l}
\;\;(5x^5 - x^4 + 2x^3 + ix - 2i) : (x^2 + x + 1) = 5x^3 \\
\underline{-(5x^5 + 5x^4 + 5x^3)} \\
\qquad\quad -6x^4 - 3x^3 + ix - 2i
\end{array}$$

Predchádzajúci postup zopakujeme, pričom polynóm f nahradíme polynómom f_1. Získame tak druhý člen podielu q a polynóm f_2. Tento postup opakujeme k-krát, kde k je určené podmienkou $\mathrm{st}(f_k) < \mathrm{st}(g)$. Celý výpočet je potom takýto:

$$\begin{array}{l}
\;\;(5x^5 - x^4 + 2x^3 + ix - 2i) : (x^2 + x + 1) = 5x^3 - 6x^2 + 3x + 3 \\
\underline{-(5x^5 + 5x^4 + 5x^3)} \\
\qquad\quad -6x^4 - 3x^3 + ix - 2i \\
\quad\;\; \underline{-(-6x^4 - 6x^3 - 6x^2)} \\
\qquad\qquad\qquad 3x^3 + 6x^2 + ix - 2i \\
\qquad\qquad\; \underline{-(3x^3 + 3x^2 + 3x)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 3x^2 + (-3+i)x - 2i \\
\qquad\qquad\qquad\; \underline{-(3x^2 + 3x + 3)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (-6+i)x - 3 - 2i
\end{array}$$

Podielom polynómov f, g je polynóm $q(x) = 5x^3 - 6x^2 + 3x + 3$ a zvyškom je polynóm $r(x) = (-6+i)x - 3 - 2i$. Pre tieto polynómy platí

$$5x^5 - x^4 + 2x^3 + ix - 2i = (x^2 + x + 1)(5x^3 - 6x^2 + 3x + 3) + (-6+i)x - 3 - 2i$$

$\blacksquare$

Poznámka 1.4. Pri výpočte koeficientov podielu q a zvyšku r sa používajú len operácie sčitovania, násobenia a delenia, preto ak f, g sú reálne polynómy, tak aj q, r sú reálne polynómy. Dokonca, ak f, g sú racionálne polynómy (ich koeficienty sú racionálne čísla), tak aj q, r sú racionálne polynómy.

Veta 1.6. Zvyšok po delení polynómu f polynómom $x - c$, kde $c \in \mathbf{C}$, je konštantný polynóm $r(x) = f(c)$.

Dôkaz

Nech q je podiel a r zvyšok po delení polynómu f polynómom $x - c$. Potom

$f(x) = (x - c)q(x) + r(x),\ \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(x - c) = 1$

Stupeň polynómu r je teda buď 0 alebo $-\infty$, čo znamená, že polynóm r je konštantný, čiže $r(x) = u, u \in \mathbf{C}$. Môžeme teda písať

$f(x) = (x - c)q(x) + u$

odkiaľ pre $x = c$ dostaneme

$f(c) = (c - c)q(c) + u = 0q(c) + u = u.$

□

Všimnime si teraz bližšie delenie polynómu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polynómom $g(x) = x - c$, kde $n \geq 1,\ a_n \neq 0,\ c \in \mathbf{C}$. Podielom je polynóm $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$ a zvyškom $r(x) = u$. Poďme zistiť, aké sú ich koeficienty $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, u$. Predovšetkým platí rovnosť polynómov

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 &= (x - c)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0) + u = \\ &= b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - cb_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (b_0 - cb_1)x + u - cb_0 \end{aligned}$$

Porovnaním koeficientov dostaneme

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & b_{n-1} \\ an - 1 & = & b_{n-2} - cb_{n-1} \\ & \vdots & \\ a_1 & = & b_0 - cb_1 \\ a_0 & = & u - cb_0 \end{array} \qquad \text{odkiaľ} \qquad \begin{array}{rcl} b_{n-1} & = & a_n \\ b_{n-2} & = & a_{n-1} + cb_{n-1} \\ & \vdots & \\ b_0 & = & a_1 + cb_1 \\ u & = & a_0 + cb_0 \end{array}$$

Výsledné vzťahy je vhodné písať v tvare tabuľky

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline c & & cb_{n-1} & \cdots & cb_1 & cb_0 \\ \hline & \underbrace{a_n}_{b_{n-1}} & \underbrace{a_{n-1} + cb_{n-1}}_{b_{n-2}} & \cdots & \underbrace{a_1 + cb_1}_{b_0} & \boxed{\underbrace{a_0 + cb_0}_{u=f(c)}} \end{array}$$

ktorú nazývame *Hornerova schéma.*

Príklad 1.6. Hornerovou schémou vydeľte polynóm $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 8x + 2$ polynómom $x - 2$ a vypočítajte $f(2)$.

Riešenie

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -2 & 0 & 1 & -8 & 2 \\ \hline 2 & & 2 & 0 & 0 & 2 & -12 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & -6 & \boxed{-10} \end{array}$$

Podiel je polynóm $x^4 + x - 6$ a zvyšok -10. Takže platí

$f(x) = (x - 2)(x^4 + x - 6) - 10$

$f(2) = -10$

■

Definícia 1.4. Hovoríme, že polynóm f je *deliteľný* polynómom $g, g \neq \mathbf{0}$, a píšeme $g \mid f$, ak existuje taký polynóm h, že $f = gh$.
Polynóm g sa nazýva *deliteľ* polynómu f.

Poznámka 1.5. Všimnime si, že polynóm f je deliteľný polynómom g práve vtedy, keď zvyšok po delení polynómu f polynómom g je nulový.
Namiesto „polynóm f je deliteľný polynómom g" sa tiež hovorí „polynóm g delí polynóm f".

Príklad 1.7. Zistite, pre aké čísla a, b je polynóm $f(x) = ax^3+2x^2+bx+a$ deliteľný polynómom $g(x) = x^2 + 1$.

Riešenie

Vydelením polynómu f polynómom g dostaneme podiel $q(x) = ax + 2$ a zvyšok $r(x) = (b - a)x + a - 2$. K splneniu podmienky $g \mid f$ stačí, aby zvyšok r bol nulový polynóm. Teda $b - a = 0,\ a - 2 = 0$, odkiaľ $a = 2, b = 2$.
Polynóm g delí polynóm f, keď $a = 2, b = 2$.

Korene polynómu.

Definícia 1.5. Komplexné číslo c nazývame *koreňom polynómu* f, ak $f(c) = 0$.

Príklad 1.8. Zistite, či niektoré z čísel 3, $1+i$ je koreňom polynómu $h(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 2$.

Riešenie

Stačí zistiť, či hodnota polynómu h v daných číslach je 0. Počítajme

$$h(3) = 2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 2 = 54 - 45 + 18 - 2 = 25$$

Vidíme, že číslo 3 nie je koreňom polynómu h.
Hodnotu polynómu h v čísle $1 + i$ vypočítame pomocou Hornerovej schémy.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -5 & 6 & -2 \\
\hline
1+i & & 2+2i & -5-i & 2 \\
\hline
 & 2 & -3+2i & 1-i & \boxed{0}
\end{array} = h(1+i)$$

Zistili sme, že $h(1 + i) = 0$, teda $1 + i$ je koreňom polynómu h.

■

Veta 1.7. Komplexné číslo c je koreňom polynómu f práve vtedy, keď $(x - c) \mid f$.

Dôkaz

Najprv dokážeme implikáciu: Ak c je koreň f, tak $(x - c) \mid f$. Nech teda $f(c) = 0$. Vieme, že

$$f(x) = (x - c)q(x) + \underbrace{f(c)}_{0} = (x - c)q(x)$$

To ale znamená, že $(x - c) \mid f$.

Teraz dokážeme opačnú implikáciu: Ak $(x - c) \mid f$, tak c je koreň polynómu f. Nech teda $(x - c) \mid f$, potom existuje taký polynóm h, že

$f(x) = (x - c)h(x)$

Táto rovnosť platí pre všetky $x \in \mathbf{C}$, špecálne teda aj pre $x = c$:

$f(c) = (c - c)h(c) = 0 \cdot h(c) = 0$

Z toho vyplýva, že c je koreň polynómu f.

□

Definícia 1.6. Ak číslo c je koreň polynómu f stupňa $n \in \mathbf{N}$, tak lineárny polynóm $x - c$ nazývame *koreňový činiteľ* polynómu f.

Definícia 1.7. Komplexné číslo c sa nazýva *k-násobný koreň* ($k \in \mathbf{N}$) polynómu f, $\mathrm{st}(f) \geq 1$, ak $(x - c)^k \mid f$ a $(x - c)^{k+1} \nmid f$.
Pre $k = 1$ hovoríme, že c je *jednoduchý koreň*.

Poznámka 1.6. Ak c je k-násobný koreň polynómu f, tak $f(x) = (x-c)^k g(x)$ pre vhodný polynóm g, ale pre každý polynóm h, je $f(x) \neq (x-c)^{k+1} h(x)$

Príklad 1.9. Zistite, koľkonásobným koreňom polynómu $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ je číslo 2.

Riešenie

Pomocou Hornerovej schémy vydelíme polynóm f polynómom $x - c$. Ak vyjde nulový zvyšok, opakujeme delenie pre podiel, ktorý sme predtým dostali. Toto delenie opakujeme dovtedy, kým vyjde nenulový zvyšok. Násobnosť koreňa je potom zrejme počet delení, pri ktorých vyšiel nulový zvyšok.

	1	−5	7	−2	4	−8
2		2	−6	2	0	8
	1	−3	1	0	4	$\boxed{0}$
2		2	−2	−2	−4	
	1	−1	−1	−2	$\boxed{0}$	
2		2	2	2		
	1	1	1	$\boxed{0}$		
2		2	6			
	1	3	$\boxed{7}$			

Číslo 2 je trojnásobným koreňom polynómu f, ktorý môžeme písať v tvare
$f(x) = (x-2)^3(x^2 + x + 1)$.

■

Veta 1.8. (o racionálnych koreňoch) Nech racionálne číslo $\frac{p}{q}$, kde p, q sú nesúdeliteľné celé čísla, je koreň polynómu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, s celočíselnými koeficientami. Potom $q \mid a_n$, $p \mid a_0$.

Dôkaz

Hodnota polynómu f v čísle $\frac{p}{q}$ je nula, preto

$$\begin{aligned}
0 &= a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 \\
0 &= a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 \quad / \cdot q^n \\
0 &= a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n \\
-a_n p^n &= a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n \\
-a_n p^n &= q\left(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Všetky čísla v poslednej rovnosti sú celé, preto z tejto rovnosti vyplýva, že q delí $a_n p^n$ a keďže p a q sú nesúdeliteľné, musí q deliť a_n.

Ak z tretej z predchádzajúcich rovníc vyjadríme $a_0 q^n$, dostaneme

$$-a_0 q^n = p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1}\right)$$

z čoho vyplýva $p \mid a_0 q^n$ a keďže p a q sú nesúdeliteľné, tak $p \mid a_0$.

□

Príklad 1.10. Nájdite všetky racionálne korene polynómu $f(x) = \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}$

Riešenie

Polynóm f nemá celočíselné koeficienty, ale polynóm $g(x) = 6f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1$ áno. Navyše pre každé komplexné číslo x platí $f(x) = 0$ práve vtedy, keď $g(x) = 0$, To znamená, že g má rovnaké korene ako f. Môžeme teda hľadať racionálne korene polynómu g v tvare $\frac{p}{q}$, kde p je celé číslo, q je prirodzené číslo vyhovujúce podmienkam: p delí $a_0 = 1$, q delí $a_5 = 2$. Do úvahy pripadajú čísla:

$$p \in \{\pm 1\},\ q \in \{1, 2\},\ \text{odkiaľ vyplýva } \frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}\right\}$$

Ak polynóm g má racionálny koreň, tak podľa predchádzajúcej vety to môže byť len niektoré z čísel ± 1, $\pm\frac{1}{2}$ a žiadne iné. Ktoré z nich je koreňom polynómu g, môžeme zistiť Hornerovou schémou. V prípade, že natrafíme na koreň, zistíme hneď jeho násobnosť.

	2	−3	2	−2	0	1
1		2	−1	1	−1	−1
	2	−1	1	−1	−1	0
1		2	1	2	1	
	2	1	2	1	0	
1		2	3	5		
	2	3	5	6		

Zistili sme, že polynóm g je deliteľný polynómom $(x-1)^2$, ale nie je deliteľný polynómom $(x-1)^3$, čo znamená, že 1 je dvojnásobný koreň polynómu g a tento polynóm môžeme napísať v tvare $g(x) = (x-1)^2(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$.
Tretie delenie polynómu g polynómom $x - 1$ v Hornerovej schéme už nebolo nutné vykonať. Stačilo si uvedomiť, že reálny polynóm $h(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$, ktorý je nenulový s nezápornými koeficientami, nemôže mať kladné korene, lebo hodnota tohto polynómu v kladnom čísle je kladné číslo, a teda nie nula. Všetky ďalšie korene polynómu g už musia byť koreňmi polynómu h. Preto stačí pokračovať v Hornerovej schéme pre polynóm h, pričom, kladné čísla už nemusíme overovať.

	2	1	2	1
−1		−2	1	−3
	2	−1	3	2

Číslo -1 nie je koreňom polynómu g.

	2	1	2	1
$-\frac{1}{2}$		−1	0	−1
	2	0	2	0

Polynóm $2x^2+2$ už nemá reálne korene (teda ani racionálne), a preto číslo $-\frac{1}{2}$ je len jednoduchým koreňom polynómu g.

Polynóm g, a teda aj f, má práve tieto racionálne korene: 1 - dvojnásobný, $-\frac{1}{2}$ - jednoduchý a polynóm f môžeme písať v tvare súčinu $f(x) = \frac{1}{6}g(x) = \frac{1}{6}(x-1)^2\left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2)$.

■

Veta 1.9. Nech $f \in P(\mathbf{R})$, $\mathrm{st}(f) \geq 1$, potom platí: Ak $c \in \mathbf{C}$ je koreň polynómu f, tak aj komplexne združené číslo $\overline{c}$ je koreň polynómu f. Naviac, ak c je k-násobný koreň polynómu f, tak aj $\overline{c}$ je k-násobný koreň polynómu f.

Dôkaz

Urobíme dôkaz len prvej časti vety. Nech c je koreň polynómu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, potom

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{0} = \overline{f(x)} = \overline{a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0} = \\ &= \overline{a_n c^n} + \overline{a_{n-1}c^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 c} + \overline{a_0} = \\ &= a_n(\overline{c})^n + a_{n-1}(\overline{c})^{n-1} + \ldots + a_1\overline{c} + a_0 = f(\overline{c}). \end{aligned}$$

$f(\overline{c}) = 0$, teda $\overline{c}$ je koreň polynómu f.

□

Reálny polynóm stupňa aspoň 1 nemusí mať žiadny reálny koreň. Môže sa stať, žeby komplexný polynóm stupňa aspoň 1 nemal žiadny komplexný koreň? Takáto situácia nemôže nastať, pretože platí:

Veta 1.10. (Základná veta algebry) Každý komplexný polynóm stupňa aspoň jedna má aspoň jeden komplexný koreň.

□

Príklad 1.11. Nájdite všetky korene polynómu $f(x) = 2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 6x + 2$, ak viete, že jedným koreňom je $-1 + i$.

Riešenie

f je polynóm s reálnymi koeficientami, preto ďalším jeho koreňom je $\overline{-1+i} = -1-i$. Vydeľme polynóm f koreňovými činiteľmi $x + 1 - i$, $x + 1 + i$:

	2	5	8	7	6	2
$-1+i$		$-2+2i$	$-5+i$	$-4+2i$	$-5+i$	-2
	2	$3+2i$	$3+i$	$3+2i$	$1+i$	$\boxed{0}$
$-1-i$		$-2-2i$	$-1-i$	$-2-2i$	$-1-i$	
	2	1	2	1	$\boxed{0}$	

Podielom je polynóm $h(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$. Zvyšné korene polynómu f sú koreňmi polynómu h. Jeho jediný racionálny koreň sme našli v predchádzajúcom príklade, je ním číslo $-\frac{1}{2}$. Tiež sme tam zistili, že $h(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2)$. Zostávajúce korene polynómu f sú preto koreňmi polynómu $2x^2 + 2$. Nájdeme ich riešením kvadratickej rovnice $2x^2 + 2 = 0$:

$$2x^2 + 2 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$x = \pm i$$

Polynóm f má korene $-1 + i$, $-1 - i$, $-\frac{1}{2}$, $i, -i$. Sú to všetko jednoduché korene.

■

Nech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. Podľa základnej vety algebry má tento polynóm aspoň jeden koreň. Označme ho c_1. Polynóm f je deliteľný koreňovým činiteľom $x - c_1$, teda existuje polynóm f_1 stupňa $n - 1$ tak, že

$f(x) = (x - c_1)f_1(x)$

Ak $n - 1 \geq 1$, tak f_1 má koreň, môžeme ho označiť c_2, a existuje taký polynóm f_2, $\mathrm{st}(f_2) = n - 2$, že

$f_1(x) = (x - c_2)f_2(x)$ a potom $f(x) = (x - c_1)(x - c_2)f_2(x)$

Takto môžeme pokračovať ďalej a po n-tom zopakovaní tohto kroku dostaneme

$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n)f_0(x)$, $\mathrm{st}(f_0) = 0$

f_0 je konštantný polynóm, preto pre všetky komplexné čísla x je $f_0(x) = b$, kde b je komplexné číslo. Vzhľadom k tomu, že najvyšší koeficient polynómu f je a_n, musí platiť: $b = a_n$.Tak sme dospeli k tvaru polynómu f

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n)$$

ktorý nazývame *rozklad polynómu f na súčin koreňových činiteľov.*
Z tohto tvaru polynómu f vyplýva, že čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$ sú jeho korene a okrem nich žiadne iné nemá. Preto platí

Veta 1.11. Polynóm stupňa n, $n \geq 1$, má najviac n rôznych koreňov.

□

Poznámka 1.7. Polynóm nultého stupňa nemá žiadny koreň. Koreňom polynómu stupňa $-\infty$ (nulového polynómu) je každé komplexné číslo.

Veta 1.12. Nech f, g sú komplexné polynómy stupňa najviac n, $g \neq \mathbf{0}, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a nech pre $n+1$ komplexných čísel $x_0, x_1, \ldots, x_n$ platí

$$f(x_0) = g(x_0), f(x_1) = g(x_1), \ldots, f(x_n) = g(x_n),$$

potom $f = g$.

Dôkaz

Polynóm $f - g$ je stupňa najviac n a má aspoň $n+1$ koreňov, lebo $(f-g)(x_k) = 0$ pre $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Z toho, na základe predchádzajúcej vety vyplýva, že $f - g$ je nulový polynóm, a teda $f = g$.

□

Kanonický rozklad polynómu nad R a nad C.

V rozklade polynómu f na súčin koreňových činiteľov nemusia byť korene $c_1, \ldots, c_n$ navzájom rôzne. Povedzme, že navzájom rôzne sú len $c_1, \ldots, c_k$, $(k \leq n)$, pričom c_1 sa tam vyskytuje r_1-krát, $\ldots, c_k$ r_k-krát. Potom môžeme písať

$$f(x) = a_n(x - c_1)^{r_1}(x - c_2)^{r_2} \ldots (x - c_k)^{r_k}$$

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$$

Tomuto tvaru hovoríme *kanonický roklad polynómu* f *nad* $\mathbf{C}$.

Príklad 1.12. Ako sme zistili v predchádzajúcom príklade, polynóm $f(x) = 2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 6x + 2$ má iba jednoduché korene: $-1+i$, $-1-i$, $-\frac{1}{2}$, $i, -i$. Preto jeho kanonický rozklad nad $\mathbf{C}$ je takýto:

$$f(x) = 2(x + 1 - i)(x + 1 + i)(x + \frac{1}{2})(x - i)(x + i)$$

V príklade predtým sme našli racionálne korene polynómu $g(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1$. Sú to 1 - dvojnásobný, $-\frac{1}{2}$ - jednoduchý koreň. Zvyšné korene sú koreňmi polynómu $2x^2 + 2$, teda i a $-i$, tiež jednoduché. Takže kanonický rozklad nad $\mathbf{C}$ polynómu g je

$$g(x) = 2(x - 1)^2(x + \frac{1}{2})(x - i)(x + i)$$

■

Zaoberajme sa teraz reálnym polynómom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ a možnosťou rozložiť ho na súčin reálnych polynómov, čo možno najmenšieho stupňa. Povedzme, že polynóm f má reálne korene (navzájom rôzne) $c_1, \ldots, c_k$ násobností v poradí $r_1, \ldots, r_k$ a imaginárne korene (navzájom rôzne, a pretože $f \in P(\mathbf{R})$, po dvoch komplexne združené) $\alpha_1, \overline{\alpha_1}, \ldots, \alpha_m, \overline{\alpha_m}$ násobností $s_1, \ldots, s_m$. Potom

$$f(x) = a_n(x - c_1)^{r_1} \ldots (x - c_k)^{r_k}(x - \alpha_1)^{s_1}(x - \overline{\alpha_1})^{s_1} \ldots (x - \alpha_m)^{s_m}(x - \overline{\alpha_m})^{s_m}$$

je kanonický rozklad polynómu f nad $\mathbf{C}$. Samozrejme sa môže stať, že polynóm f nemá reálne resp. imaginárne korene, v takom prípade by v kanonickom rozklade nevystupovali reálne resp. imaginárne koreňové činitele.

Ľahko sa presvedčíte, že pre každé komplexné číslo α platí

$$(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2 \in P(\mathbf{R})$$

Použitím tohto vzťahu môžeme kanonický rozklad nad $\mathbf{C}$ polynómu f upraviť na tvar

$$f(x) = a_n(x - c_1)^{r_1} \ldots (x - c_k)^{r_k}(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \ldots (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}$$

kde $c_1, \ldots, c_k$ sú navzájom rôzne reálne korene násobností $r_1, \ldots, r_k$, polynómy $x^2 + p_j x + q_j$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ majú imaginárne korene $\alpha_j, \overline{\alpha_j}$, ktoré sú s_j-násobnými koreňmi polynómu f a $r_1 + \cdots + r_k + 2(s_1 + \cdots + s_m) = n$. Takýto tvar reálneho polynómu nazývame *kanonický rozklad nad* $\mathbf{R}$ polynómu f.

Príklad 1.13. Z kanonického rozkladu nad $\mathbf{C}$ $f(x) = 2(x+1-i)(x+1+i)(x+\frac{1}{2})(x-i)(x+i)$ polynómu $f(x) = 2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 6x + 2$ vynásobením polynómov $x+1-i$, $x+1+i$ a $x-i$, $x+i$ dostaneme kanonický rozklad nad $\mathbf{R}$

$$f(x) = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+2x+2)(x^2+1)$$

Podobne z kanonického rozkladu nad $\mathbf{C}$ $g(x) = 2(x-1)^2(x+\frac{1}{2})(x-i)(x+i)$ polynómu $g(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1$ dostaneme kanonický rozklad nad $\mathbf{R}$

$$g(x) = 2(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+1)$$

■

Kanonické rozklady niektorých polynómov môžeme získať ich postupným rozkladom na súčin použitím vhodných úprav a vzorcov.

Príklad 1.14. Nájdite kanonické rozklady nad $\mathbf{R}$ aj nad $\mathbf{C}$ polynómov $f(x) = 4x^4 + 6x^2 + 9$ a $g(x) = 8x^6 - 27$.

Riešenie

Bikvadratický trojčlen sa dá rozložiť na súčin dvoch polynómov druhého stupňa doplnením prvého a druhého člena alebo prvého a tretieho člena na štvorec. V jednom prípade vyjde rozdiel štvorcov, čo vieme rozložiť na súčin.
Skúsme doplniť na štvorec prvé dva členy kvadratického trojčlena f:

$$f(x) = 4\left(x^4+\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}\right) = 4\left(\left(x^2+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}+\frac{9}{4}\right) = 4\left(\left(x^2+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{27}{16}\right)$$

Nedostali sme rozdiel štvorcov. Doplňme na štvorec prvý a tretí člen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\left(\left(x^2+\frac{3}{2}\right)^2 - 3x^2 + \frac{3}{2}x^2\right) = 4\left(\left(x^2+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}x^2\right) = \\ &= 4\left(x^2+\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)\left(x^2+\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) = 4\left(x^2-\sqrt{\frac{3}{2}}x+\frac{3}{2}\right)\left(x^2+\sqrt{\frac{3}{2}}x+\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Podarilo sa nám rozložiť polynóm f na súčin kvadratických polynómov. Ich diskriminant $D = \frac{3}{2} - 4\frac{3}{2} = -\frac{9}{2}$ je záporný, teda tieto kvadratické polynómy nemajú reálne korene. Preto

$$f(x) = 4\left(x^2-\sqrt{\frac{3}{2}}x+\frac{3}{2}\right)\left(x^2+\sqrt{\frac{3}{2}}x+\frac{3}{2}\right)$$

je kanonický rozklad polynómu f nad $\mathbf{R}$. Na rozloženie polynómu g na súčin použijeme vzorec $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

$$g(x) = 8\left((x^2)^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^3\right) = 8\left(x^2-\frac{3}{2}\right)\left(x^4+\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}\right)$$

Polynóm $x^2 - \frac{3}{2}$ rozložíme podľa vzorca pre rozdiel štvorcov. Druhý polynóm je $\frac{1}{4}f$, ktorého rozklad nad $\mathbf{R}$ už poznáme. Kanonický rozklad polynómu g nad $\mathbf{R}$ teda je

$$g(x) = 8\left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x^2-\sqrt{\frac{3}{2}}x+\frac{3}{2}\right)\left(x^2+\sqrt{\frac{3}{2}}x+\frac{3}{2}\right)$$

Kanonické rozklady nad $\mathbf{C}$ polynómov f a g získame z ich kanonických rozkladov nad $\mathbf{R}$, ak rozložíme v nich vystupujúce kvadratické polynómy na súčin lineárnych polynómov. K tomu stačí nájsť korene dvoch kvadratických rovníc

$$x^2-\sqrt{\frac{3}{2}}x+\frac{3}{2} = 0, \quad x^2+\sqrt{\frac{3}{2}}x+\frac{3}{2} = 0$$

Ľahko vypočítate, že sú to čísla

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{2\sqrt{2}}i,\quad \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{3}{2\sqrt{2}}i,\quad -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{2\sqrt{2}}i,\quad -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{3}{2\sqrt{2}}i$$

Kanonické rozklady nad **C** teda sú

$$f(x)=4\left(x-\tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\tfrac{3}{2\sqrt{2}}i\right)\left(x-\tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\tfrac{3}{2\sqrt{2}}i\right)\left(x+\tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\tfrac{3}{2\sqrt{2}}i\right)\left(x+\tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\tfrac{3}{2\sqrt{2}}i\right)$$

$$g(x)=8\left(x-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\left(x+\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\left(x-\tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\tfrac{3}{2\sqrt{2}}i\right)\left(x-\tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\tfrac{3}{2\sqrt{2}}i\right)\left(x+\tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\tfrac{3}{2\sqrt{2}}i\right)$$
$$\left(x+\tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\tfrac{3}{2\sqrt{2}}i\right)$$

■

Poznámka 1.8. (o algebraických rovniciach) *Algebraickou rovnicou stupňa n*, $n\geq 1$, nazývame rovnicu $f(x)=0$, kde f je polynóm stupňa n. *Riešením* (*koreňom*) tejto rovnice je každé komplexné číslo c, pre ktoré platí $f(c)=0$, t.j. c je koreň polynómu f. Riešiť algebraickú rovnicu $f(x)=0$ znamená nájsť všetky jej korene, t.j. všetky korene polynómu f. Poznamenajme, že pre výpočet koreňov algebraických rovníc vyšších stupňov ako 4 neexistujú vo všeobecnosti analogické vzorce ako pre kvadratické rovnice. Pre algebraické rovnice stupňov 3 a 4 síce takéto vzorce existujú, ale pre svoju komplikovanosť sú prakticky nepoužiteľné. Na riešenie algebraických rovníc ľubovoľného stupňa sú vypracované numerické metódy, pomocou ktorých možno vypočítať korene s ľubovoľne zvolenou presnosťou.

Cvičenie 1.

(1) Vynásobte polynómy:

(a) $2x^4-6x^3+5x-1)(x^2-2x+2)$ $[2x^6-10x^5+16x^4-7x^3-11x^2+12x-2]$

(b) $(3x^3+(1-i)x^2+ix-2+i)(3x^3+(1+i)x^2-ix-2-i)$ $[9x^6+6x^5+2x^4-14x^3-5x^2+2x+5]$

(2) Vykonajte delenie so zvyškom:

(a) $(2x^4-3x^3+4x^2-5x+6):(x^2-3x+1)$ $\left[\begin{array}{l}\text{podiel: } 2x^2+3x+11\\ \text{zvyšok: } 25x-5\end{array}\right]$

(b) $2ix^6+(2-2i)x^5-ix^4+x^3-x^2):(ix^3+(1-i)x^2+1)$ $\left[\begin{array}{l}\text{podiel: } 2x^3-x-1\\ \text{zvyšok: } -ix^2+x+1\end{array}\right]$

(c) $(x^3-x^2-x):(x-1+2i)$ $\left[\begin{array}{l}\text{podiel: } x^2-2ix-5-2i\\ \text{zvyšok: } -9+8i\end{array}\right]$

(3) Pomocou Hornerovej schémy vykonajte delenie so zvyškom:

(a) $(x^4-2x^3+4x^2-6x+8):(x-1)$ $[(x-1)(x^3-x^2+3x-3)+5]$

(b) $(4x^3+x^2):(x+1+i)$ $[(x+1+i)(4x^2-(3+4i)x-1+7i)+8-6i]$

(c) $(3x^4+(1-3i)x^3-2ix^2+ix-i):(x-i)$ $[(x-i)(3x^3+x^2-ix+1+i)-1]$

(4) Pomocou Hornerovej schémy vypočítajte $f(c)$:

(a) $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16,\ c=4$ $[136]$

(b) $f(x)=6x^4-7x^3+4x+2,\ c=-\frac{1}{3}$ $[1]$

(c) $x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7,\ c=-2-i$ $[-1-44i]$

(5) Aké podmienky musia spĺňať komplexné čísla p, q, m, aby polynóm x^4+px^2+q bol deliteľný polynómom x^2+mx+1? $[m=0,\ q-p+1=0 \text{ alebo } q=1,\ p=2-m^2]$

(6) Určte číslo a tak, aby číslo c bolo koreňom polynómu f:

(a) $f(x)=x^3+2x^2-ax+2,\ c=3$ $[\frac{47}{3}]$

(b) $f(x) = 2x^5 - ax^4 - x^3 + ax^2 + 3a,\ c = -1$ $[\frac{1}{3}]$

(7) Zistite koľkonásobným koreňom polynómu f je číslo c:

(a) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x + 8,\ c = 2$ [dvojnásobný]

(b) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8,\ c = 2$ [trojnásobný]

(c) $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16,\ c = -2$ [štvornásobný]

(d) $f(x) = x^6 - 2ix^5 - x^4 - x^2 + 2ix + 1.\ c = i$ [trojnásobný]

(8) Nájdite racionálne korene polynómov:

(a) $2x^7 - 13x^6 + 6x^5 + 13x^4 - 18x^3 + 29x^2 - 22x + 3,$ [1 - dvojnásobný, $-\frac{3}{2}$]

(b) $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4,$ $[-\frac{2}{3},\ 2]$

(c) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$ [nemá racionálne korene]

(d) $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$ $[\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{4}]$

(e) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$ [-1 - štvornásobný]

(9) Riešte rovnicu, ak poznáte jeden jej koreň:

(a) $x^4 - 4x^2 + 8x - 4 = 0,\ 1 - i$ $[1 \pm i,\ -1 \pm \sqrt{3}]$

(b) $4x^6 - 16x^5 + 35x^4 - 60x^3 + 71x^2 + 16x - 20 = 0,\ 2 + i$ $[2 \pm i,\ \pm 2i,\ \pm\frac{1}{2}]$

(c) $x^6 - x^5 - 13x^3 + 9x^2 + 8x + 20 = 0,\ -1 + 2i,$ [$-1 \pm 2i$, 2 - dvojnásobný, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$]

(d) $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1,\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ [1, $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$ - dvojnásobný]

(10) Nech a, b, c sú navzájom rôzne komplexné čísla. Dokážte, že polynómy f, g sú rovnaké.

(a) $f(x) = \dfrac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)},\ g(x) = x^2$

(b) $f(x) = \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)},\ g(x) = 1$

(11) Nájdite kanonický roklad polynómov nad **C**:

(a) $ix^3 + 1$ $\left[i(x+i)\left(x - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(x - \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)\right]$

(b) $x^4 - 1$ $[(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)]$

(c) $3x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 14x^2 + 3x - 3$ $\left[3(x+1)^2\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + i\sqrt{3})(x - i\sqrt{3})\right]$

(d) $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4$ $\left[6(x-2)\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)\left(x - \frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)\right]$

(12) Nájdite kanonický roklad polynómov nad **R**:

(a) $x^4 + 4$ $[(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)]$

(b) $x^6 - 8$ $[(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 2)(x^2 - \sqrt{2}x + 2)]$

(c) $3x^4 - 18x^2 + 9$ $$\left[\begin{array}{l} 3\left(x - \frac{\sqrt{6+2\sqrt{3}}+\sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6+2\sqrt{3}}-\sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}\right)\cdot \\ \cdot\left(x + \frac{\sqrt{6+2\sqrt{3}}+\sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{6+2\sqrt{3}}-\sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}\right) \end{array}\right]$$

(d) $4x^4 + x^2 + 1$ $\left[4\left(x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\right)\right]$

(e) $2x^6 + 3x^5 + x^3 + 3x^2 - 1$ $\left[2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)^3(x^2 - x + 1)\right]$

(f) $x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^2 - 8x + 4$ $[(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)]$