Determinanty štvorcových matíc

Definícia. Nech $n \in N$, $A \in C^{n \times n}$ a nech matica A_{ij} vznikne z matice A vynechaním riadku A_{i*} a stĺpca A_{*j}.

Determinantom matice A nazývame číslo $\det A$ definované nasledovne:

1) ak $n = 1$, $A = (a_{11})$, tak $\det A = a_{11}$,
2) ak $n > 1$, tak

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} \text{ (rozvoj podľa 1. riadku).}\end{aligned}$$

Podľa definície pre:

$n = 2$: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \det(a_{22}) - a_{12} \det(a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$n = 3$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \; A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \; A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$\det A =$
$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$
$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$
$-(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$ (Sarusovo pravidlo)

$$\left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Definícia. Nech $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$. Číslo $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ sa nazýva algebraický doplnok prvku a_{ij} v matici A.

Príklad. Vypočítajte algebraickeé doplnky prvkov matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$, $\tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3, \ldots$

Veta o výpočte determinantu. *Nech* $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, $n > 1$.
Potom platí:
(1) *Ak* B *vznikla z matice* A *pomocou ERO*
  a) $A_{i*} \leftrightarrow A_{j*}$, $i \neq j$, *tak* $\det B = -\det A$,
  b) $A_{i*} \to \alpha A_{i*}$, $\alpha \in C$, *tak* $\det B = \alpha \det A$,
  c) $A_{i*} \to A_{i*} + \alpha A_{j*}$ $i \neq j$, *tak* $\det B = \det A$.
(2) *Pre* $\forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}$
  a) $\det A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik}$ *(rozvoj podľa riadku* A_{i*}*)*,
  b) $\det A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}\tilde{a}_{ki}$ *(rozvoj podľa stĺpca* A_{*i}*)*
(3) *Nech* $A, A', A'' \in C^{n\times n}$ *a nech* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
  Ak $A_{i*} = A'_{i*} + A''_{i*}$ *a pre* $\forall k \neq i$ *platí* $A_{k*} = A'_{k*} = A''_{k*}$,
  tak $\det A = \det A' + \det A''$.

Definícia. Matica $A \in C^{m\times n}$ sa nazýva
  a) dolná trojuholníková, ak $j > i \implies a_{ij} = 0$,
  b) horná trojuholníková ak $j < i \implies a_{ij} = 0$,
  c) trojuholníková, ak je dolná alebo horná trojuholníková,
  d) diagonálna, ak je dolná aj horná trojuholníková.

Matica $A^\top = B = (b_{ij}) \in C^{n\times m}$ sa nazýva matica transponovaná k matici A, ak platí

$$b_{ij} = a_{ji} \text{ pre } \forall\ i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, m.$$

Dôsledky vety o výpočte determinantu:
1. Ak pre $i \neq j$ $A_{*i} = A_{*j}$, tak $\det A = 0$.
2. Ak je A trojuholníková, tak $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.
3. $\det A^\top = \det A$.

Pre maticu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ označme $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$.
$\operatorname{adj} A$ sa nazýva matica adjungovaná k matici A.

$$A(\operatorname{adj} A) =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13} & a_{11}\tilde{a}_{21} + a_{12}\tilde{a}_{22} + a_{13}\tilde{a}_{23} & a_{11}\tilde{a}_{31} + a_{12}\tilde{a}_{32} + a_{13}\tilde{a}_{33} \\ a_{21}\tilde{a}_{11} + a_{22}\tilde{a}_{12} + a_{23}\tilde{a}_{13} & a_{21}\tilde{a}_{21} + a_{22}\tilde{a}_{22} + a_{23}\tilde{a}_{23} & a_{21}\tilde{a}_{31} + a_{22}\tilde{a}_{32} + a_{23}\tilde{a}_{33} \\ a_{31}\tilde{a}_{11} + a_{32}\tilde{a}_{12} + a_{33}\tilde{a}_{13} & a_{31}\tilde{a}_{21} + a_{32}\tilde{a}_{22} + a_{33}\tilde{a}_{23} & a_{31}\tilde{a}_{31} + a_{32}\tilde{a}_{32} + a_{33}\tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = (\operatorname{adj} A)A$$

Predchádzajúce vúpočty sa dajú urobiť pre každé $n \in N$:

Veta. *Nech* $A \in C^{n\times n}$, $\det A = d$.

Potom $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = dI_n$.

Matica A *je regulárna ptáve vtedy, keď* $\det A \neq 0$.

V takom prípade $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$.

Veta (Cramerovo pravidlo). *Nech* $A \in C^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in C^{n\times 1}$ *a* $\det A = d \neq 0$

Potom má sústava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *jediné riešenie*

$\mathbf{x} = \frac{1}{d}(d_1,\ d_2,\ \dots\ d_n)^\top$, *kde* d_j *je determinant matice, ktorá vznikne z matice* A *zámenou stĺpca* A_{*j} *za stĺpec pravých strán* $\mathbf{b}$.

Príklad. Pomocou Cramerovho pravidla riešte sústavu

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1\,. \end{aligned} \qquad d = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}_{R_1+R_2} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6\,,$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}_{R_1+R_2} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6\,, \quad d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 12\,.$$

$x_1 = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{6}{6} = 1$, $x_3 = \dfrac{12}{6} = 2$.

Príklad. Pomocou determinantov nájdite inverznú maticu k matici

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Vypočítajte $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Lineárna závislosť a nezávislosť

Definícia. Nech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in C$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in C^n$. Potom

(1) $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k \in C^n$ sa nazýva lineárna kombinácia prvkov $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$.

(2) Nech $M \subset C^n$. Množina všetkých lineárnych kombinácií prvkov množiny M sa nazýva lineárny obal množiny M ($\mathrm{Lo}\, M$).

(3) Hovoríme, že usporiadaná k-tica $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$ je lineárne nezávislá, ak

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$

(4) Usporiadaná k-tica $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$, ktorá nie je lineárne nezávislá sa nazýva lineárne závislá.

(5) Ak $k = n$ a $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ je lineárne nezávislá, tak sa nazýva usporiadaná báza priestoru C^n.

Veta.

1. *Usporiadaná k-tica $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$ prvkov C^n je lineárne závislá práve vtedy, ak sa niektoré $\mathbf{x}_i$ dá vyjadriť ako lineárna kombinácia predchádzajúcich prvkov $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{i-1})$.*
2. *Ak $k > n$, tak každá usporiadaná k-tica $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$ prvkov C^n je lineárne závislá*
3. *Usporiadaná báza $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ priestoru C^n má vlastnosti:*
   - *3a. B je lineárne nezávislá,*
   - *3b.* $\mathrm{Lo}\, B = C^n$,
   - *3c. Každé $\mathbf{x} \in C^n$ sa dá jediným spôsobom vyjadriť ako lineárna kombinácia prvkov bázy B.*

Veta. *Každá lineárne nezávislá usporiadaná k-tica prvkov C^n sa dá doplniť na usporiadanú bázu C^n.*

Príklad. $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, kde
$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ je usporiadaná báza priestoru R^3 aj priestoru C^3. Nazýva sa štandardná báza.

Dôkaz.

$\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 = (\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

Preto $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 = (0, 0, 0) \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Definícia. $M \subset C^n$ sa nazýva podpriestor priestoru C^n, ak
(1) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$,
(2) $\mathbf{x} \in M, \alpha \in C \implies \alpha\mathbf{x} \in M$.

Veta. *$M \subset C^n$ je podpriestorom priestoru C^n vtedy a len vtedy, ak je lineárnym obalom nejakej podmnožiny $B \subset C^n$.*

Definícia. Usporiadaná k-tica $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k) \subset C^n$ sa nazýva usporiadaná báza podpriestoru $M \subset C^n$, ak
1) B je lineárne nezávislá.
2) $\mathrm{Lo}\, B = M$.

Veta. *Všetky usporiadané bázy daného podpriestoru $M \subset C^n$ majú rovnaký počet $k \leq n$ prvkov. Toto číslo sa nazýva dimenzia podpriestoru M (*$\dim M$*.*

Definícia. Nech $A \in C^{m \times n}$. Číslo $\dim \mathrm{Lo}\{A_{1*}, A_{2*}, \ldots, A_{m*}\}$ sa nazýva hodnosť matice A (označujeme $h(A)$).

$h(A)$ je maximálny počet lineárne nezávislých riadkov matice A.

Veta. *Hodnosť matice A sa nezmení vykonaním ERO a platí*
$h(A) = \dim \mathrm{Lo}\{A_{1*}A_{2*}, \ldots, A_{m*}\} = \dim \mathrm{Lo}\{A_{*1}A_{*2}, \ldots, A_{*n}\}$.

Veta. *Nech $A \in C^{n \times n}$. Potom*

$$\det A \neq 0 \iff h(A) = n \iff \exists A^{-1}.$$

Veta (Frobeniova)**.** *Sústava lineárnych rovníc má riešenie vtedy a len vtedy, ak sa hodnosť matice sústavy rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy.*

Príklady.

1. Určte hodnosť matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$
2. Zistite, či $(0, 2, 3, -1) \in \mathrm{Lo}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, ak
   $\mathbf{b}_1 = (0, 2, 3, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, 1, 2, -2)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, 5, 8, -4)$.
3. Zistite, či $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1, -1)$,
   $\mathbf{b}_3 = (1, 2, 3)$, je báza priestoru C^3.
4. Určte hodnosť matíc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$