Sústavy lineárnych rovníc

Sústava m lineárnych rovníc s n neznámymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ má tvar:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{S}$$

a_{ij} $(i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{1, \ldots, n\})$ sú dané čísla (koeficienty), pravé strany $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sú tiež dané známe čísla.

Definícia. Usporiadaná n-tica čísel $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sa nazýva riešením sústavy (S), ak pre ňu platia rovnosti vo všetkých rovniciach danej sústavy.

Riešiť sústavu lineárnych rovníc znamená nájsť množinu všetkých riešení. Budeme ju označovať P.

Príklad. Pre „sústavu" jednej rovnice s jednou neznámou $ax = b$, $a, b \in R$ môžu nastať tri prípady

1. $a \neq 0 \implies P = \left\{ \dfrac{b}{a} \right\}$ — **práve jedno** riešenie.
2. $a = 0 = b \implies P = R$ — **nekonečne veľa** riešení.
3. $a = 0,\ b \neq 0 \implies P = \emptyset$ — **žiadne** riešenie.

matice

R^n (C^n) bude označovať množinu všetkých usporiadaných n-tíc reálnych (komplexných) čísel. Zavedieme v nich algebraické operácie:

Definícia. Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$ $(\in C^n)$, nech $\alpha \in R$ $(\in C)$. Potom

(i) $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
sa nazýva súčet usporiadaných n-tíc $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

(ii) $\alpha \odot \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$
sa nazýva násobok n-tice $\mathbf{x}$ číslom α.

(iii) Usporiadaná n-tica $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ sa nazýva nulová.

(iv) Usporiadaná n-tica $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$
sa nazýva n-tica opačná k n-tici $\mathbf{x}$.

Definícia. Obdĺžniková tabuľka reálnych (komplexných) čísel a_{ij}, $i \in \{1, 2, , \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

sa nazýva matica typu $m \times n$ nad reálnymi (komplexnými) číslami. Množinu všetkých matíc typu $m \times n$ označujeme $R^{m \times n}$ ($C^{m \times n}$).

označenie:
A_{i*} alebo R_i — i-ty riadok, A_{*j} alebo S_j — j-ty stĺpec matice A.
Ak $A \in R^{m \times n}$, tak $A_{i*} \in R^n$, $A_{*j} \in R^m$.

Definícia. Matica $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$ sa nazýva matica sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{S}$$

Matica

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots\dots\dots\dots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

sa nazýva rozšírená matica sústavy (S).

Na popísanie Gausovej eliminačnej metódy riešenia sústavy lineárnych rovníc (úpravy matice A) zavedieme nasledujúce pojmy:

Definícia. Nech $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$. Vedúcim prvkom (pivotom) nenulového riadku matice A sa nazýva prvý (zľava) nenulový prvok v tomto riadku. Ak je A_{i*} nulový riadok, tak nemá ved. prvok.

Matica A sa nazýva stupňovitá, ak pre každé $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ platí

1. $A_{i*} = 0 \implies A_{i+1,*} = 0$ (nulové riadky sú pod všetkými nenulovými).
2. Ak a_{ip} a $a_{i+1,q}$ sú pivoty i-teho a $i+1$-ho riadku matice A, tak $q > p$ (t.j. pivot v nižšom riadku je viac vpravo).

Definícia. Dve sústavy lineárnych rovníc (S1) a (S2) sa nazývajú **ekvivalentné**, ak je každé riešenie sústavy (S1) tiež riešením sústavy (S2) a naopak, každé riešenie sústavy (S2) je riešením sústavy (S1).

Hovoríme, že matice $A \in R^{m\times(n+1)}$ a $B \in R^{k\times(n+1)}$ sú **ekvivalentné** (píšeme $A \sim B$, ak sú rozšírenými maticami ekvivalentných sústav lineárnych rovníc.

Príklad. Matica $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ nie je stupňovitá, matica $B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ je stupňovitá (B vznikla z matice A zmenou poradia riadkov: $R_1 \leftrightarrow R_2$, $R_3 \leftrightarrow R_4$. Je zrejmé, že $A \sim B$. Množinu P všetkých riešení sústavy, ktorej rozšírená matica je B nájdeme „spätným dosadzovaním":

R_3 zodpovedá rovnici: $2x_4 = 0$, teda $\underline{x_4 = 0}$,

v S_3 nie je pivot, zvolíme si $\underline{x_3 = a}$,

R_2 zodpovedá rovnici: $-x_2 + x_3 + 2x_4 = -3$.

Dosadíme za x_3, x_4: $-x_2 + a = -3 \implies$ $\underline{x_2 = a + 3}$,

R_1: $x_1 + x_2 + x_4 = 0 \implies x_1 = -x_2 - x_4 \implies$ $\underline{x_1 = -a - 3}$.

$$\boxed{P = \{(-a-3, a+3, a, 0) \colon a \in R\}}$$

Gaussova eliminačná metóda je algoritmus, ktorý zmení danú maticu A ma stupňovitú maticu B tak, aby $A \sim B$ a následne „spätným dosadzovaním" vypočíta množinu všetkých riešení zodpovedajúcej sústavy.

Najprv si uvedomíme, že nasledujúce operácie na matici nemenia množinu P všetkých riešení zodpovedajúcej sústavy.

Definícia. Elementárnou riadkovou operáciou (ERO) na matici A sa nazýva

1. $A_{i*} \leftrightarrow A_{j*}$, $i \neq j$ (vzájomná výmena dvoch riadkov).
2. $A_{i*} \to \alpha A_{i*}$, $\alpha \neq 0$ (násobenie niektorého riadku nenulovým číslom).
3. $A_{i*} \to A_{i*} + \alpha A_{j*}$, $i \neq j$ (pričítanie násobku iného riadku k danému riadku).

Veta. *Ak matica B vznikne z matice A pomocou ERO, tak $A \sim B$.*

Veta. *Každá matica $A = (a_{ij}) \in C^{m\times n}$ sa dá upraviť na stupňovitú pomocou konečného počtu ERO.*

Náčrt dôkazu.
1. Ak $A = 0$, tak je stupňovitá.
2. Ak $A \neq 0$, tak nájdeme jej prvý (zľava) nenulový stĺpec A_{*j_1} a v ňom prvý (zhora) nenulový prvok $a_{i_1 j_1}$. Ak $i_1 \neq 1$, tak vykonáme $R_1 \leftrightarrow R_{i_1}$.
3. Dostaneme maticu B, $j < j_1 \implies B_{*j} = 0$, $b_{1j_1} \neq 0$. Vykonáme ERO: $R_1 \to \frac{1}{b_{1j_1}} R_1$.
4. Dostaneme maticu C, $j < j_1 \implies C_{*j} = 0$ a navyše $c_{1j_1} = 1$. Teraz vykonáme ERO: $R_i \to R_i - c_{ij_1} R_1$, $i = 2, 3, \ldots, m$.

   Výsledkom je matica tvaru $\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \ldots & 0 & 1 & * & * & \ldots * \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & * & * & \ldots * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & * & * & \ldots * \end{array}\right)$ Kroky

1–4 potom vykonáme na vyznačenej podmatici (má $m - 1$ riadkov).

Definícia. Nech $A = (a_{ij}) \in R^{m\times n}$ je stupňovitá. Matica A sa nazýva redukovaná stupňovitá, ak
1. Všetky pivoty jej riadkov sa rovnajú 1.
2. V stĺpci matice A, v ktorom sa nachádza pivot niektorého riadku sú všetky ostatné prvky nulové.

Veta. *Každá matica je ekvivalentná s jednoznačne určenou redukovanou stupňovitou maticou.*

Veta. *Nech $A \in R^{m\times(n+1)}$ je (redukovaná) stupňovitá matica, ktorá je rozšírenou maticou sústavy lineárnych rovníc* (S). *Ak má A k nenulových riadkov, tak*

1) *Ak je $A_{k*} = (0\ 0\ \ldots\ 0 \mid 1)$, tak súustava* (S) *nemá riešenie.*
2) *Ak $k = n$ a $A_{k*} = (0\ 0\ \ldots\ 1 \mid c)$, $c \in C$, tak* (S) *má práve jedno riešenie*
3) *Ak $k < n$ a $A_{k*} \neq (0\ 0\ \ldots\ 0 \mid 1)$, tak má sústava* (S) *nekonečne veľa riešení a na určenie množiny P všetkých riešení treba $n - k$ parametrov.*

Poznámka. Ak sú pravé strany všetkých rovníc sústavy (S) nulové, tak má aspoň jedno riešenie. Také sústavy sa nazývajú homogénne. Pri ich riešení upravujeme maticu sústavy (nie rozšírenú).

Príklad. 1. Rozhodnite, či je daná matica (redukovaná) stupňovitá. Ak áno napíšte množinu všetkých riešení príslušnej sústavy.

a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$

2. Riešte sústavu

$$\begin{aligned} x_1 + (1+i)x_2 - 2ix_3 &= 7 \\ ix_1 - 3x_2 + (1-i)x_3 &= 2i \end{aligned}$$

3. Riešte sústavu s parametrom $\lambda \in C$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Maticové operácie

Ak A je matica sústavy (S) a $\mathbf{b}$ je stĺpec jej pravých strán, tak sa sústava stručne zapisuje v tvare

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (A krát $\mathbf{x}$ rovná sa $\mathbf{b}$), presnejšie:

Definícia. Nech $A = (a_{ij}) \in C^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in C^{n\times 1}$, tak stĺpec $A\mathbf{x} =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

sa nazýva súčin matice A so stĺpcom $\mathbf{x}$.

Definícia. Nech $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in C^{m\times n}$, $\alpha \in C$. Potom definujeme

$$A + B = \big(a_{ij} + b_{ij}\big)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}, \qquad \alpha A = \big(\alpha a_{ij}\big)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}},$$

Súčet dvoch matíc nerovnakého typu nie je definovaný.

Definícia súčinu matíc. Ak $A = (a_{ij}) \in C^{m\times k}$, $B = (b_{ij}) \in C^{k\times n}$, tak definujeme $A \cdot B = C = (c_{ij}) \in C^{m\times n}$, pričom

$$c_{ij} = A_{i*} \cdot B_{*j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}$$

Ak sa počet riadkov matice B nerovná počtu stĺpcov matice A, tak súčin $A \cdot B$ nie je definovaný.

Príklad. Nájdite $A, B \in R^{2\times 2}$, pre ktoré $AB \neq BA$ (násobenie matíc nie je komutatívne).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Teda jednou z možností je $A = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Veta. *Nech $A \in C^{m\times k}$, $B \in C^{k\times \ell}$, $D \in C^{\ell\times n}$.*
Potom platí $(AB)D = A(BD)$ (asociatívny zákon)

Veta. *Nech $A, B \in C^{m\times k}$, $D \in C^{k\times n}$, $E \in C^{\ell\times m}$. Potom platia diostributívne zákony:*
(i) $(A + B)D = AD + BD$ (ii) $E(A + B) = EA + EB$

Definícia. Matica $A \in C^{n\times n}$, pre ktorú platí: $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j\\ 1, & i = j\end{cases}$ sa nazýva jednotková. Označuje sa I_n.

$$P \in C^{m\times n} \implies PI_n = P, \qquad Q \in C^{n\times k} \implies I_nQ = Q.$$

Definícia. Matica $A \in C^{n\times n}$ sa nazýva **regulárna** (invertibilná), ak $\exists\ B \in C^{n\times n}$, pre ktoré $AB = BA = I_n$. Matica B sa potom nazýva matica inverzná k matici A (označenie: $B = A^{-1}$). Matica, ktorá nie je regulárna sa nazýva **singulárna**.

Pritom platí $AB = I_n \implies BA = I_n$ a inverzná matica existuje najviac jedna.

Príklad. $A = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Nájdite A^{-1}, ak existuje.

Hľadáme $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ tak, aby $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, t.j. riešime tri sústavy:

$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ich rozšírené matice sú:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -8 & 29 & -11 & 1 \\ -5 & 18 & -7 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -8 & 29 & -11 & 0 \\ -5 & 18 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -8 & 29 & -11 & 0 \\ -5 & 18 & -7 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Riešime naraz všetky tri:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -8 & 29 & -11 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 18 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & -1 \end{array}\right), A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tento postup platí všeobecne: $A \in C^{n\times n}$ rozšírime o I_n. Ak $(A \mid I_n) \sim (I_n \mid B)$, tak $B = A^{-1}$. Ak redukovaná stupňovitá matica ekvivalentná s A nie je I_n, tak $\nexists A^{-1}$.

Príklad. 1. Riešte maticové rovnice

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Vypočítajte A^{-1}, ak $A =$

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$