Veta. *Nech nech* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$; $a, b \in R$ *a nech je číslo* $c = a + ib$ *koreňom polynómu* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Potom je aj komplexne združené číslo $\overline{c} = a - ib$ *koreňom polynómu* $f(x)$.

Príklad. Daný je polynóm $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2$. Vypočítajte hodnotu $f(-1+i)$ a nájdite všetky korene polynómu f.

Racionálne funkcie

Definícia. Nech f, g sú polynómy nad R (nad C), $g \neq 0$. Potom funkciu $r(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ nazývame **racionálna funkcia** nad R (nad C). Ak $\operatorname{st} f < \operatorname{st} g$, tak sa funkcia $r(x)$ nazýva **rýdzoracionálna**.

Definícia. Elementárnym zlomkom nad C sa nazýva racionálna funkcia tvaru

$$r(x) = \frac{a}{(x-c)^k};\ a, c \in C,\ k \in N.$$

Elementárnym zlomkom nad R sa nazýva racionálna funkcia jedného z tvarov

a) $r(x) = \dfrac{a}{(x-c)^k}$; $a, c \in R$, $k \in N$.

b) $r(x) = \dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$; $a, b, p, q \in R$, $k \in N$, $p^2 - 4q < 0$.

Veta. *Každá racionálna funkcia nad* R *(nad* C*) sa dá napísať jediným spôsobom ako súčet polynómu a elementárnych zlomkov nad* R *(nad* C*).*

Pomocná veta. *Nech* f, g *sú polynómy nad* C, $\operatorname{st} f < n + \operatorname{st} g$, $c \in C$, $g(c) \neq 0$. *Potom* $\exists a \in C$ *a polynóm* $h(x)$ *také, že*

$$\frac{f(x)}{(x-c)^n g(x)} = \frac{a}{(x-c)^n} + \frac{h(x)}{(x-c)^{n-1} g(x)}\,. \tag{1}$$

Dôkaz. Pre $a \in C$ platí: $\dfrac{f(x)}{(x-c)^n g(x)} =$

$$= \frac{ag(x) + f(x) - ag(x)}{(x-c)^n g(x)} = \frac{ag(x)}{(x-c)^n g(x)} + \frac{f(x) - ag(x)}{(x-c)^n g(x)} \tag{2}$$

Pre $a = \dfrac{f(c)}{g(c)}$ a pre $f_1(x) = f(x) - ag(x)$ platí $f_1(c) = 0 \Rightarrow$ existuje polynóm $h(x)$ taký, že $f(x) - ag(x) = (x-c)h(x)$. Dosadením do vzťahu (2) a vykrátením dostaneme (1).

Príklad. Funkciu $r(x) = \dfrac{2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ rozložte na elementárne zlomky.

1. $r(x)$ nie je rýdzoracionálna, preto najprv delíme:

$$
\begin{array}{l}
\quad(2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x + 1) : (x^3 - 2x^2 - x + 2) = 2x - 1 \\
\underline{-(2x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x)} \\
\qquad\quad - x^3 + 4x^2 - 6x + 1 \\
\qquad \underline{-(-x^3 + 2x^2 + x - 2)} \\
\qquad\qquad\qquad 2x^2 - 7x + 3 \text{ zvyšok}
\end{array}
$$

$r(x) = 2x - 1 + \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ a treba ešte rozložiť rýdzorac. funkciu $\dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$.

2. Menovateľa rozložíme: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$ a hľadáme čísla A, B, C tak, aby platilo pre $\forall x \in R$

$$\frac{2x^2 - 7x + 3}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 2}$$

$$2x^2 - 7x + 3 = A(x + 1)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 1)$$

Dosadením
$x = 1$: $2 - 7 + 3 = A(1 + 1)(1 - 2) \Rightarrow -2 = -2A \Rightarrow \boxed{A = 1}$;
$x = -1$: $2 + 7 + 3 = B(-1 - 1)(-1 - 2) \Rightarrow 12 = 6B \Rightarrow \boxed{B = 2}$;
$x = 2$: $8 - 14 + 3 = -3 = 3C \implies \boxed{C = -1}$.

Výsledok:

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x - 2}\,.$$

Príklady.

1. Rozhodnite, či je daná funkcia elementárny zlomok nad R.

   a) $\dfrac{1}{(x+2)^2}$ b) $\dfrac{x}{(x+2)}$ c) $\dfrac{x}{x^2+2x+1}$

   d) $\dfrac{x}{x^2+2x+2}$ e) $\dfrac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}$ f) $\left(\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}\right)^3$

2. Nájdite rozklad danej funkcie na elementárne zlomky nad R aj nad C.

   a) $\dfrac{3x^2+4x+3}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$ $\left[\frac{2}{x^2+1}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{i}{x+i}-\frac{i}{x-i}+\frac{1}{(x+1)^2}\right]$

   b) $\dfrac{-x^2-2x+1}{x^3+6x^2+12x+8}$ $\left[\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{2}{(x+2)^2}-\frac{1}{x+2}\right]$

   c) $\dfrac{1}{2x^2+5x-12}$ $\left[\frac{2}{11}\frac{1}{2x-3}-\frac{1}{11}\frac{1}{x+4}\right]$

   d) $\dfrac{3x-4}{(x-2)(x-1)^3}$ $\left[\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}\right]$

   e) $\dfrac{5x^2-14x+17}{(x-5)^2(x-1)^2}$ $\left[\frac{9}{2}\frac{1}{(x-5)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}\right]$

   f) $\dfrac{4x^2+3x+3}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$

   $\left[\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{-x+1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1-i}{x-i}+\frac{1+i}{1+i}+\frac{-1-i}{x+1-i}+\frac{-1+i}{x+1+i}\right)\right]$