Skúška z M1, 8. január 2016, 8:00 hod.

Teória (odpovede vpíšte sem)

1. O každom tvrdení a – d rozhodnite, či je pravdivé. Svoju odpoveď odôvodnite.

a) [4 body] Ak $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $B \in R^{2\times 2}$, tak $AB = BA$.

NIE, Napr. pre $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = BA$

b) [4] Ak je funkcia $f\colon R \to R$ spojitá v bode $a \in R$, tak má aj deriváciu v bode a.

NIE, napr $f(x) = |x|$ je spojitá v bode $a = 0$, ale nemá v ňom deriváciu.

c) [2] Ak $q \in (-1, 1)$, tak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

NIE, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$

d) [4] Ak funkcia $f\colon R \to R$ má deriváciu $f'\colon R \to R$ a vieme, že $f(1) = -1$, $f'(1) = 2$, tak pre funkciu $F(x) = e^{f(x)}$ platí $F'(1) < 1$.

Áno, podľa vety o derivácii zloženej funkcie $F'(1) = e^{f(1)} f'(1) = e^{-1} \cdot 2 = \frac{2}{e} < 1$

---

2. [2] Doplňte nasledujúce tvrdenie tak, aby bolo pravdivé:
Nech $f\colon \langle 1, 5\rangle \to R$ pričom $f(1)$ je záporné a $f(5)$ kladné.
Ak je f..............................(aká?) funkcia, tak existuje $x \in (1, 5)$, pre ktoré $f(x) = 0$.

Ak je f *spojitá* funkcia, tak ...

Príklady

3. [10] Dané sú čísla $z = 1 - i$, $w = 1 + i\sqrt{3}$. Doplňte (výpočty urobte na osobitnom papieri)

a) Číslo zw má algebraický tvar ....,

b) absolútne hodnoty: $|z| =$........................ $|w| =$.......................,

c) argumenty: $\arg z =$.......................... $\arg w =$......................... ,

d) Číslo zw má goniometrický tvar ....,

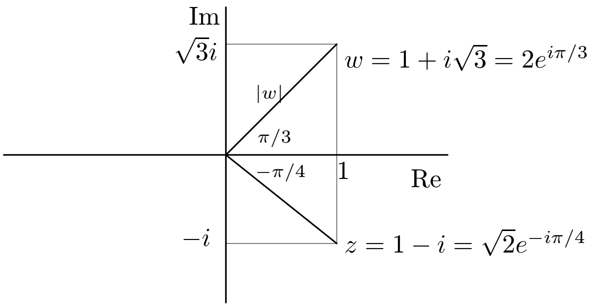
e) Číslo zw má exponenciálny tvar ....,

f) w^{100} má exponenciálny tvar ....

a) $(1-i)(1+i\sqrt{3}) = 1 + i\sqrt{3} - i - i^2\sqrt{3} = (1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)$

b) $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $|w| = \sqrt{1+3} = 2$

c) Čísla z a w znázorníme a zistíme argumenty



$\arg z = -\frac{\pi}{4}$

$\arg w = \frac{\pi}{3}$

d), e) (absolútne hodnoty násobíme, argumenty sčítame, $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{1}{12}\pi$)

$zw = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{12}\pi + i\sin\frac{1}{12}\pi\right) = 2\sqrt{2}e^{i(\pi/12)}$

f) $w^{100} = 2^{100}e^{i(100\pi/3)}\Big($ekvivalentne $= 2^{100}e^{i(\frac{100}{3}\pi + 2k\pi)} = 2^{100}e^{i\frac{4}{3}\pi}[\text{ pre } k = -16)]\Big)$

4. [6] Vypočítajte limity a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{2x}$, c) $\lim\limits_{x\to(\pi/4)}\dfrac{\sin x}{2x}$,

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1 \implies \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

b) $\begin{array}{l} -1\le \sin x\le 1 \\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0\end{array} \implies \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{2x}=0$ c) $\lim\limits_{x\to(\pi/4)}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{\sin(\pi/4)}{2(\pi/4)}=\dfrac{\sqrt{2}/2}{\pi/2}=\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$

---

5. [9] $f(x)=e^{-x}\sqrt{x-1}$. Určte a) $D(f)$, b) f' a $D(f')$.

c) Overte, že priamka $y=0$ je asymptota funkcie f.

d) Zistite, či má funkcia f ešte inú asymptotu.

Riešenie:

a) $x-1\ge 0$, t.j. $D(f)=\langle 1,\infty)$, b) $f'(x)=-e^{-x}\sqrt{x-1}+e^{-x}\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}$, t.j. $\sqrt{x-1}$ je v menovateli, $x\neq 1$, $D(f')=(1,\infty)$

c) $y=0\cdot x+0$ je asymptota so smernicou $k=0$:

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x^2}}e^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1-(1/x)}{x}}e^{-x}=0,$

pomocou L'Hospitalovho pravidla $(\frac{\infty}{\infty})$: $q=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}}{e^x}=0.$

Jednoduchšie riešenie c): aby bola priamka $y=0$ asymptotou v ∞ stačí, aby platilo $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

d) $-\infty$ nie je hromadný bod $D(f)$ a funkcia je spojitá na celom $D(f)$, preto ASS v $-\infty$ ani ABS funkcia f nemá

---

6. [10] a) Zistite, či konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

Je to rad so striedavými znamienkami. Overíme, že spĺňa podmienky Leibnizovho kritéria:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1 \implies \lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln 1=0.$

2) $0\le a_n=\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ je klesajúca postupnosť (lebo $\ln x$ je rastúca funkcia, teda $1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{n} \implies \ln(1+\frac{1}{n+1})<\ln(1+\frac{1}{n})$).

<u>rad konverguje</u>

b) Vypočítajte súčet $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$.

Rad je súčtom dvoch geometrických radov:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} + \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{10+15}{6} = \frac{25}{6}$$

7. [4] Prvá derivácia funkcie $f\colon R \to R$ je $f'(x) = -7(x+1)(x-2)^2(2x-5)e^{-x}$.

Nájdite intervaly monotónnosti funkcie f.

f' je spojitá funkcia a platí $(x-2)^2 \geq 0$, $e^{-x} > 0$, $f'(x) = 0 \implies x \in \{-1, 2, \frac{5}{2}\}$.

$x \in (-\infty, -1) \implies f'(x) < 0$, $x \in \left\langle -1, \frac{5}{2} \right\rangle \implies f'(x) \geq 0$, $x \in \left(\frac{5}{2}, \infty\right) \implies f'(x) < 0$.

rastúca na $\left\langle -1, \frac{5}{2} \right\rangle$, klesajúca na $(-\infty, -1\rangle$ a $\left\langle \frac{5}{2}, \infty\right)$.

---

8. [5] Určte Taylorov polynóm druhého stupňa funkcie $f(x) = \sqrt{1+2x}$ v strede $a = 0$.

$f(x) = (1+2x)^{1/2}$, $f'(x) = \frac{1}{2}(1+2x)^{(1/2)-1} \cdot 2 = (1+2x)^{-1/2}$, $f''(x) = -(1+2x)^{-3/2}$.

$T_2(f, 0, x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x - \frac{1}{2}x^2$