**Teória**

1. O každom tvrdení a – d rozhodnite, či je pravdivé. Svoju odpoveď odôvodnite.

a) [3 body] Množina $M = \{(1,2,-2);\ (3,0,1);\ (1,-4,5)\}$ je lineárne závislá.

**áno** lebo $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$

b) [3] $x \in \mathbb{R} \implies \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$

**nie**, napr. pre $x = \pi$: $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\pi) = 0 \neq \pi$

c) [5] Pre funkcie $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ a $g(x) = \dfrac{(x+3)^3}{(x-6)^2}$ platí $f'(0) = g'(0) = 1$. Preto má aj funkcia

$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{pre } x \geq 0 \\ g(x), & \text{pre } x < 0 \end{cases}$ deriváciu $h'(0) = 1$.

**nie** $h'(0)\ \nexists$, v opačnom prípade by $h$ bola spojitá v bode $a = 0$, ale

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(x+3)^3}{(x-6)^2} = \frac{3^3}{6^2} \neq h(0) = 0$$

Alebo priamo $h'(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)-0}{x-0} = \frac{3^3/6^2}{0^-} = -\infty$

d) [3] Funkcia $f\colon R \to R$ má spojitú deriváciu $f'\colon R \to R$ a vieme, že $f(1) = -1$, $f'(1) = 2$, Potom pre funkciu $F(x) = \operatorname{arccotg}\big(f(x)\big)$ platí $F'(1) \geq -1$.

**áno** $F'(x) = -\dfrac{1}{1+(f(x))^2} f'(x) \implies f'(1) = -\frac{2}{2} = -1 \geq -1$

2. [3] Doplňte nasledujúce tvrdenie tak, aby bolo pravdivé:

Ak $a_n \in R$ a $\lim\limits_{n\to\infty}$ ....................., tak nekonečný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je ...................................

Možné správne odpovede:

Ak $a_n \in R$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tak nekonečný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný

Ak $a_n \in R$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, tak nekonečný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný

a veľa ďalších možností.

---

**Príklady**

3. [5] Riešte rovnicu $z^5 = -i$, výsledok napíšte v exponenciálnom tvare a znázornite v komplexnej rovine.

$z^5 = -i = e^{\frac{3}{2}\pi i}$

$z_k = e^{\frac{1}{5}(\frac{3}{2}+2k)\pi i} = e^{\frac{3+4k}{10}\pi i} = e^{i\varphi_k}$, $k = 0,1,2,3,4$

$\varphi_0 = \frac{3}{10}\pi$, $\varphi_1 = \frac{7}{10}\pi$, $\varphi_2 = \frac{11}{10}\pi$, $\varphi_3 = \frac{15}{10}\pi = \frac{3}{2}\pi$, $\varphi_4 = \frac{19}{10}\pi$

---

4. [5] Pomocou determinantov riešte sústavu

$$2i\,x + y = -i$$
$$(1+i)\,x + 2y = 0$$

$$d = \begin{vmatrix} 2i & 1 \\ (1+i) & 2 \end{vmatrix} = 3i - 1, \quad d_x = \begin{vmatrix} -i & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2i, \quad d_y = \begin{vmatrix} 2i & -i \\ (1+i) & 0 \end{vmatrix} = -1 + i$$

$x = \frac{d_x}{d} = \frac{-2i}{-1+3i}$. $y = \frac{d_y}{d} = \frac{-1+i}{-1+3i}$, Alg. tvar: $P = \left\{\left(-\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i, \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right)\right\}$

5. [5] $f(x) = \dfrac{x^2-6x+3}{x^3+x^2+9x+9}$ napíšte ako súčet elementárnych zlomkov nad $\mathbb{R}$.

$x^3+x^2+9x+9 = x^2(x+1)+9(x+1) = (x^2+9)(x+1)$

$\dfrac{x^2-6x+3}{(x^2+9)(x+1)} = \dfrac{ax+b}{x^2+9} + \dfrac{c}{x+1}$

$x^2-6x+3 = (ax+b)(x+1)+c(x^2+9) = (a+c)x^2+(a+b)s+b+9c$

$a=0,\ b=-6,\ c=1,\ f(x) = \dfrac{-6}{x^2+9} + \dfrac{1}{x+1}$

---

6. [6 ] Vypočítajte limity

a) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)\operatorname{arccotg}(\frac{1}{x})$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1+x)\operatorname{arccotg}(\frac{1}{x})$, c) $\lim\limits_{x\to 3^+} \operatorname{cotg}(x-3)\ln\left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)$.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)\operatorname{arccotg}(\frac{1}{x}) = \text{“}0\times ohr'' = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1+x)\operatorname{arccotg}(\frac{1}{x}) = \ln 2\operatorname{arccotg}(1) = \dfrac{\pi}{4}\ln 2$

c) $\lim\limits_{x\to 3^+} \operatorname{cotg}(x-3)\ln\left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\ln\left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)}{\operatorname{tg}(x-3)} \text{“}\frac{0}{0}'' = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\left(\frac{\sin 3}{\sin x}\frac{\cos x}{\sin 3}\right)}{\frac{1}{\cos^2(x-3)}} = \dfrac{\cos 3}{\sin 3} = \operatorname{cotg} 3$

7. [6] Napíšte definičný obor, obor hodnôt a funkciu inverznú k funkcii $f(x) = \sqrt{1-\log_2(x-1)}$.

$D(f):\ x-1>0 \iff x>1$,

$1-\log_2(x-1) \geq 0,\ 1 = \log_2 2,\ \log_2 2 \geq \log_2(x-1) \implies 3 \geq x,\ D(f) = (1,3\rangle$,

$y = \sqrt{1-\log_2(x-1)} \implies y^2 = 1-\log_2(x-1) \implies 1-y^2 = \log_2(x-1)$

$2^{1-y^2} = x-1 \implies x = f^{-1}(y) = 1+2^{1-y^2},\ H(f) = \langle 0,\infty)$

---

8. [6] Vypočítajte súčet nekonečného radu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3^n-2^n}{5^n}$.

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3^n-2^n}{5^n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} (\frac{3}{5})^n - (\frac{2}{5})^n = s_1 - s_2$ rozdiel geometrických radov,

kvocienty $q_1 = \frac{3}{5},\ q_2 = \frac{2}{5},\ |q_1|<1,\ |q_2|<1$,

$s = \frac{q_1^2}{1-q_1} - \frac{q_2^2}{1-q_2} = \frac{9}{25}\frac{5}{2} - \frac{4}{25}\frac{5}{3} = \frac{19}{30}$.

---

9. [10] Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x}$.

$D(f) = R\setminus\{0\},\ f(-2)=0,\ f(2)=8$, nie je párna ani nepárna.

ABS: $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \frac{4}{0+} = \infty,\ \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \frac{4}{0-} = -\infty,\ \underline{x=0}$,

ASS: $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x}\dfrac{(x+2)^2}{x} = 1$,

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(x+2)^2}{x} - \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x+4}{x} = 4$,

$\underline{y=x+4}$ ASS v $\pm\infty$)

$f'(x) = \dfrac{2x(x+2)-(x+2)^2}{x^2} = \dfrac{(x+2)(2x-x-2)}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{x^2}$

Stac. body: $x=\pm 2$,

rastúca na $(-\infty,-2\rangle$, $\langle 2,\infty)$, klesajúca na $\langle -2,0)$, $(0,2\rangle$.

$f(-2)=0$ je o.l.max; $f(2)=8$ je o.l.min.

$f''(x) = (1-4x^{-2})' = 8x^{-3}$, infl. body nemá, konvexná na $(0,\infty)$, konkávna na $(-\infty,0)$

$H(f) = (-\infty,0\rangle \cup \langle 8,\infty)$.