Domáce úlohy cvičenie 3 - riešenia

DÚ 1: Uvažujte štvorcovú maticu $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ a vektor $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2\times 1}}$. Vykonajte násobenie $\vec{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{C} \vec{\boldsymbol{x}}$. Ukážte, že takto získaná kvadratická forma je (ostro) väčšia ako nula (tj. $\vec{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{C} \vec{\boldsymbol{x}} > \mathbf{0}$) pre ľubovoľný vektor $\vec{\boldsymbol{x}} \neq \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Riešenie:

$$\vec{x}^T C \vec{x} = (x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 - x_2 \quad -x_1 + 3x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

Upravme:

$$\vec{x}^T C \vec{x} = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = x_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2^2 = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2$$

Ak $\vec{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, potom $x_1 \neq 0$ alebo $x_2 \neq 0$. Takže môžu nastať tri situácie:

1. $x_1 \neq 0$ a súčasne $x_2 \neq 0$,
2. $x_1 \neq 0$ a $x_2 = 0$,
3. $x_1 = 0$ a $x_2 \neq 0$.

Ak $x_1 \neq 0$ a súčasne $x_2 \neq 0$, tak $x_1^2 > 0$, $2x_2^2 > 0$ a $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$. Z toho vyplýva:

$$x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 > 0$$

Ak $x_1 \neq 0$ a $x_2 = 0$, potom $x_1^2 > 0$, $2x_2^2 = 0$ a $(x_1 - x_2)^2 > 0$. Z toho vyplýva:

$$x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 > 0$$

Ak $x_1 = 0$ a $x_2 \neq 0$, potom $x_1^2 = 0$, $2x_2^2 > 0$ a $(x_1 - x_2)^2 > 0$. Z toho vyplýva:

$$x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 > 0$$

Celkovo teda pre $\vec{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ máme: $\vec{x}^T C \vec{x} > 0$.

DÚ 2: Pre každé konečné reálne číslo $\boldsymbol{x}$ nájdite hodnosť matice $\boldsymbol{A_x}$, kde:

$$\boldsymbol{A_x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{x} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{x} \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

Uvažujme najprv $x = 1$, potom:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a jej hodnosť je rovná 1, tj. $h(A_1) = 1$.

Nech teraz $x \neq 1$. Upravujme maticu A_x na stupňovitú maticu:

$$A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix} \underset{R_1 \leftrightarrow R_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_j := R_j - R_1 \\ pre\ j = 2,3,4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & (x-1) & 0 & (1-x) \\ 0 & 0 & (x-1) & (1-x) \\ (x-1) & 0 & 0 & (1-x) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{R_j := \left(\frac{1}{1-x}\right) R_j \\ pre\ j = 2,3,4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_4 := R_4 + R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix}$$

$$R_4 := R_4 + R_2 \overset{\sim}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2+x \end{pmatrix} R_4 := R_4 + R_3 \overset{\sim}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3+x \end{pmatrix}$$

Ak $x = -3$, tak $h(A_{-3}) = 3$.
Ak $x \neq 1$ a súčasne $x \neq -3$, tak $h(A_x) = 4$.

DÚ 3: Pre každé konečné reálne číslo $\boldsymbol{\varphi}$ nájdite inverznú maticu k matici $\boldsymbol{M_\varphi}$, ak existuje, pričom:

$$\boldsymbol{M_\varphi = \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}}.$$

Riešenie:

Uvažujme najprv také $\varphi \in \mathbb{R}$, že $\varphi \neq k\frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$ (tj. $\sin\varphi \neq 0$ a súčasne $\cos\varphi \neq 0$). Potom:

$$(M_\varphi|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} \sin\varphi & \cos\varphi & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 1 \end{array}\right) R_1 := (\cos\varphi)R_1 \overset{\sim}{} \left(\begin{array}{cc|cc} \sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 := (\sin\varphi)R_2 \overset{\sim}{} \left(\begin{array}{cc|cc} \sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi & 0 & \sin\varphi \end{array}\right) R_2 := R_2 + R_1 \overset{\sim}{}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & \sin^2\varphi + \cos^2\varphi & \cos\varphi & \sin\varphi \end{array}\right) R_1 := \frac{-1}{\cos^2\varphi}R_1 \overset{\sim}{} \left(\begin{array}{cc|cc} -\operatorname{tg}\varphi & -1 & \frac{-1}{\cos\varphi} & 0 \\ 0 & 1 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{array}\right)$$

$$R_1 := R_1 + R_2 \overset{\sim}{} \left(\begin{array}{cc|cc} -\operatorname{tg}\varphi & 0 & \frac{-1}{\cos\varphi} + \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 1 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{array}\right) R_1 := (-\operatorname{cotg}\varphi)R_1 \overset{\sim}{}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1-\cos^2\varphi}{\sin\varphi} & -\cos\varphi \\ 0 & 1 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\sin^2\varphi}{\sin\varphi} & -\cos\varphi \\ 0 & 1 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi \\ 0 & 1 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{array}\right) = \left(I_2 \middle| M_\varphi^{-1}\right)$$

Teda pre $\varphi \neq k\frac{\pi}{2}$ máme $M_\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}$.

Ak $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, potom: $\cos\varphi = 0$ a $\sin\varphi = (-1)^k$. Teda:

$$M_{\frac{\pi}{2}+k\pi} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$$

a je regulárna. Nájdime inverznú maticu:

$$\left(M_{\frac{\pi}{2}+k\pi} \middle| I_2\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} (-1)^k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 & 1 \end{array}\right) R_1 := (-1)^k R_1 \overset{\sim}{} \left(\begin{array}{cc|cc} (-1)^{2k} & 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 := (-1)^k R_2 \overset{\sim}{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (-1)^k \end{array}\right) = \left(I_2 \middle| M_{\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-1}\right)$$

Teda pre $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ máme $M_\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}$.

Ak $\varphi = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, potom: $\sin\varphi = 0$ a $\cos\varphi = (-1)^k$. Teda:

$$M_{k\pi} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ (-1)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

a je regulárna. Nájdime inverznú maticu:

$$(M_{k\pi}|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & (-1)^k & 1 & 0 \\ (-1)^{k+1} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) R_1 \leftrightarrow R_2 \overset{\sim}{} \left(\begin{array}{cc|cc} (-1)^{k+1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (-1)^k & 1 & 0 \end{array}\right) R_1 := (-1)^{k+1}R_1 \overset{\sim}{}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} (-1)^{2k+2} & 0 & 0 & (-1)^{k+1} \\ 0 & (-1)^k & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{R_2 := (-1)^k R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & (-1)^{k+1} \\ 0 & 1 & (-1)^k & 0 \end{array}\right) = (I_2|M_{k\pi}^{-1})$$

Teda pre $\varphi = k\pi$ máme $M_\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+1} \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}$.

Celkovo teda pre ľubovoľné konečné reálne číslo φ platí:

$$M_\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}.$$