Domáce úlohy cvičenie 1 - riešenia

DÚ 1: Pre ktoré komplexné číslo $z = x + iy$ platí $z = (\bar{z})^2$?

Riešenie:

$$\bar{z} = x - iy \Longrightarrow (\bar{z})^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$$

Dve komplexné čísla sa rovnajú, ak sa rovnajú ich reálne aj imaginárne časti, teda musí platiť:

$$x = x^2 - y^2$$

$$y = -2xy$$

Druhá rovnosť je splnená pre ľubovoľné reálne x, ak $y = 0$, alebo pre $x = -\frac{1}{2}$, ak $y \neq 0$.

Ak $y = 0$, z prvej rovnice dostaneme: $x = x^2$, čo je splnené pre $x = 0$ alebo pre $x = 1$.

Ak $x = -\frac{1}{2}$ pre $y \neq 0$, tak z prvej rovnice máme: $-\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - y^2$. Odtiaľ: $y^2 = \frac{3}{4}$ a teda $|y| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tomu vyhovuje $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ aj $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Našli sme teda štyri riešenia rovnice $z = (\bar{z})^2$: $0, 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

DÚ 2: V obore komplexných čísel riešte rovnicu $z^2 + (2\sqrt{3} - 2i)z + 1 - \sqrt{3}i = 0$. Riešenia vyjadrite v algebraickom tvare.

Riešenie:

Upravme najprv výraz na ľavej strane rovnice na štvorec, dostaneme:

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 + 2(\sqrt{3} - i)z + \left(\sqrt{3} - i\right)^2 - \left(\sqrt{3} - i\right)^2 + 1 - \sqrt{3}i \\ &= \left(z + \sqrt{3} - i\right)^2 - \left(3 - 2\sqrt{3}i - 1\right) + 1 - \sqrt{3}i = \left(z + \sqrt{3} - i\right)^2 - 1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Označme: $w = z + \sqrt{3} - i$. Potom: $w^2 - 1 + \sqrt{3}i = 0$ a teda $w^2 = 1 - \sqrt{3}i$, čo je binomická rovnica. Vyriešme ju.

Za tým účelom zapíšme komplexné číslo $1 - \sqrt{3}i$ v exponenciálnom tvare: $1 - \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{5}{3}\pi}$. Táto binomická rovnica má dve riešenia:

$$w_k = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5}{6}\pi + k\pi\right)}, \text{kde } k = 0,1.$$

Teda:

$$w_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{5}{6}\pi} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{3} + i),$$

$$w_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{11}{6}\pi} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - i).$$

Keďže $z = w - \sqrt{3} + i$, tak riešeniami rovnice zo zadania sú:

$$z_0 = w_0 - \sqrt{3} + i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{3} + i\right) - \sqrt{3} + i = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\sqrt{3} + i\right) = -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$z_1 = w_1 - \sqrt{3} + i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} - i\right) - \sqrt{3} + i = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\sqrt{3} + i\right) = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$