1. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = -|4-x|$ v bode $a = 4$.

Riešenie:

Funkcia f nemá deriváciu v bode $a = 4$, pretože:

$$\lim_{x\to 4+} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4+} \frac{-|4-x|-0}{x-4} = \lim_{x\to 4+} \frac{-(x-4)}{x-4} = -1,$$

kým:

$$\lim_{x\to 4-} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4-} \frac{-|4-x|-0}{x-4} = \lim_{x\to 4-} \frac{x-4}{x-4} = 1.$$

2. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \arccos x$ v bode $a = -1$.

Riešenie:

Funkcia f nemá deriváciu v bode $a = -1$, pretože:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\arccos x - \arccos(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1+} \frac{\arccos x - \arccos(-1)}{x+1} = \left| \begin{array}{c} t = \arccos x \\ x \to -1+ \\ t \to \pi- \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{t\to\pi-} \frac{t-\pi}{\cos t - \cos\pi} = \lim_{t\to\pi-} \frac{t-\pi}{(-2)\sin\left(\frac{t-\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{t+\pi}{2}\right)} =$$

$$= -\left(\lim_{t\to\pi-} \frac{\frac{t-\pi}{2}}{\sin\left(\frac{t-\pi}{2}\right)}\right)\left(\lim_{t\to\pi-} \frac{1}{\sin\left(\frac{t+\pi}{2}\right)}\right) = (-1)\lim_{t\to\pi-} \frac{1}{\sin\left(\frac{t+\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{-1}{0+} = -\infty.$$

3. Zderivujte funkciu $f(x) = \dfrac{3x}{\log_x 8}$.

Riešenie:

Upravme najprv predpis funkcie f:

$$f(x) = \frac{3x}{\log_x 8} = \frac{3x}{\frac{\ln 8}{\ln x}} = \frac{3}{3\ln 2}(x\ln x) = \frac{x\ln x}{\ln 2}$$

Potom:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 2}(x\ln x)' = \frac{1}{\ln 2}\left(x\frac{1}{x} + \ln x\right) = \frac{(1+\ln x)}{\ln 2}$$

4. Zderivujte funkciu $f(x) = \cos(\arcsin x)$.

Riešenie:

$$f'(x) = -\frac{\sin(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

5. Zderivujte funkciu $f(x) = \ln(1+\sin^2 x) - 2\sin x\ \mathrm{arctg}(\sin x)$.

Riešenie:

$$f'(x) = \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x} - 2\cos x\ \mathrm{arctg}(\sin x) - \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x} = -2\cos x\ \mathrm{arctg}(\sin x)$$

6. Nech $f(x) = \sqrt{\dfrac{4+3x-x^2}{x^2+2x-3}}$. Určte $D(f)$, vypočítajte $f'(x)$ a určte $D(f')$.

Riešenie:

Označme $p(x) = 4+3x-x^2$ a $q(x) = x^2+2x-3$. Pretože pod odmocninou môžu ležať len čísla väčšie ako nula alebo rovné nule a súčasne nie je možné deliť nulou, tak $x \in D(f)$ práve vtedy, keď:

$$p(x) \geq 0 \quad \text{a súčasne} \quad q(x) > 0 \tag{1}$$

$$\text{alebo}$$

$$p(x) \leq 0 \quad \text{a súčasne} \quad q(x) < 0 \tag{2}$$

Keďže $p(x) = (4-x)(x+1)$ a $q(x) = (x-1)(x+3)$, tak $p(x) \geq 0$ pre $x \in \langle -1, 4\rangle$, $p(x) \leq 0$ pre $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 4, \infty)$ a $q(x) > 0$ pre $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$, kým $q(x) < 0$ pre $x \in (-3, 1)$.
Z podmienky (1) teda máme:

$$x \in \langle -1, 4\rangle \cap \{(-\infty, -3) \cup (1, \infty)\} = (1, 4\rangle. \tag{3}$$

Z podmienky (2) máme:

$$x \in \{(-\infty, -1\rangle \cup \langle 4, \infty)\} \cap (-3, 1) = (-3, -1\rangle. \tag{4}$$

Z (3) a (4) dostávame: $D(f) = (-3, -1\rangle \cup (1, 4\rangle$.
Vypočítajme $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{4+3x-x^2}}\left(\frac{(3-2x)(x^2+2x-3)-(2x+2)(4+3x-x^2)}{(x^2+2x-3)^2}\right).$$

Po úprave:

$$f'(x) = \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{4+3x-x^2}}\left(\frac{5x^2+2x+17}{(x^2+2x-3)^2}\right). \tag{5}$$

Platí: $D(f') = (-3, -1) \cup (1, 4)$.

7. Nech $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x-x^2}{x^2+2x-3}}$. Určte $D(f)$, vypočítajte $f'(x)$ a určte $D(f')$.

Riešenie:

Označme $p(x) = 2-x-x^2$ a $q(x) = x^2+2x-3$. Pretože pod odmocninou môžu ležať len čísla väčšie ako nula alebo rovné nule a súčasne nie je možné deliť nulou, tak $x \in D(f)$ práve vtedy, keď:

$$p(x) \geq 0 \quad \text{a súčasne} \quad q(x) > 0 \tag{6}$$

$$\text{alebo}$$

$$p(x) \leq 0 \quad \text{a súčasne} \quad q(x) < 0 \tag{7}$$

Keďže $p(x) = (1-x)(x+2)$ a $q(x) = (x-1)(x+3)$, tak $p(x) \geq 0$ pre $x \in \langle -2, 1\rangle$, $p(x) \leq 0$ pre $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 1, \infty)$ a $q(x) > 0$ pre $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$, kým $q(x) < 0$ pre $x \in (-3, 1)$.
Z podmienky (6) teda máme:

$$x \in \langle -2, 1\rangle \cap \{(-\infty, -3) \cup (1, \infty)\} = \emptyset. \tag{8}$$

Z podmienky (7) máme:

$$x \in \{(-\infty, -2\rangle \cup \langle 1, \infty)\} \cap (-3, 1) = (-3, -2\rangle. \tag{9}$$

Z (8) a (9) dostávame: $D(f) = (-3, -2\rangle$.
Na druhej strane $D(f)$ je možné zistiť aj jednoduchšie. Upravme predpis funkcie f:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2 - x - x^2}{x^2 + 2x - 3}} = \sqrt{\frac{(1-x)(x+2)}{(x-1)(x+3)}} = \sqrt{\frac{-x-2}{x+3}}. \tag{10}$$

Takže pre $x \neq 1$ musí byť podiel $\dfrac{x+2}{x+3} \leq 0$ a súčasne $x \neq -3$. To je pravda vtedy a len vtedy, ak $x \in (-3, -2\rangle$. Čiže $D(f) = (-3, -2\rangle$.
Vypočítajme $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{\frac{-x-2}{x+3}}\right)' = \left(\sqrt{-1 + \frac{1}{x+3}}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-x-3}{x+2}}\left(\frac{-1}{(x+3)^2}\right). \tag{11}$$

Platí: $D(f') = (-3, -2)$.

8. Nech $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2-x}{x-2}\right)$. Určte $D(f)$, vypočítajte $f'(x)$ a určte $D(f')$.

Riešenie:

Pretože nie je možné deliť nulou, určite $2 \notin D(f)$. Pre všetky $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ je podiel $\dfrac{2-x}{x-2} = -1$ a preto $f(x) = \arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$ pre všetky $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Teda $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f'(x) = 0$ a $D(f') = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

9. Nájdite rovnicu dotyčnice t_A a normály n_A ku grafu funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{4-x^2}$ v bode $A = (-2, ?)$. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $g(x) = x^2 - 4x + 3$, ak dotyčnica je rovnobežná s t_A.

Riešenie:

Bod $A = (-2, f(-2)) = (-2, 1)$. Pretože $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{4-x^2}$, tak $f'(-2) = 4$. Rovnica dotyčnice ku grafu funkcie f v bode A bude:

$$\begin{aligned} t_A: \quad & y - f(-2) = f'(-2)\,(x - (-2)) \\ & y - 1 = 4(x+2) \\ & y = 4x + 8 + 1 \\ & y = 4x + 9 \end{aligned}$$

Rovnica normály ku grafu funkcie f v bode A bude:

$$\begin{aligned} n_A: \quad & y - f(-2) = \frac{-1}{f'(-2)}\,(x - (-2)) \\ & y - 1 = \frac{-1}{4}(x+2) \\ & y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{2} + 1 \\ & y = -\frac{x}{4} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pre deriváciu funkcie g platí: $g'(x) = 2x - 4$. Aby dotyčnica ku grafu funkcie g bola rovnobežná s $t_A : y = 4x + 9$, tak jej smernica musí byť rovná 4. Čiže hľadáme bod $B = (b, g(b))$ taký, že $g'(b) = 4$. Rovnici $2b - 4 = 4$ vyhovuje jediné $b = 4$. Príslušný bod $B = (4, 3)$ a rovnica dotyčnice ku grafu funkcie g v bode B je:

$$\begin{aligned} t_B: \quad & y - g(4) = g'(4)\,(x - 4) \\ & y - 3 = 4(x - 4) \\ & y = 4x - 16 + 3 \\ & y = 4x - 13 \end{aligned}$$

Rovnica normály ku grafu funkcie g v bode B je:

$$\begin{aligned} n_B: \quad & y - g(4) = \frac{-1}{g'(4)}(x - 4) \\ & y - 3 = \frac{-1}{4}(x - 4) \\ & y = -\frac{x}{4} + 1 + 3 \\ & y = -\frac{x}{4} + 4 \end{aligned}$$

10. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = kx + q$, kde $k \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, v bode $A = (a, f(a))$, kde $a \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné.

Riešenie:

Pre akékoľvek $a \in \mathbb{R}$ je $f'(a) = k$. Rovnica dotyčnice ku grafu funkcie f bude:

$$\begin{aligned} t_A: \quad & y - f(a) = f'(a)(x - a) \\ & y - ka - q = k(x - a) \\ & y = kx - ka + ka + q \\ & y = kx + q = f(x) \end{aligned}$$

Čiže dotyčnicou k priamke v ľubovoľnom bode priamky je priamka samotná.
Rovnica normály ku grafu funkcie f bude:

$$\begin{aligned} n_A: \quad & y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a) \\ & y - ka - q = \frac{-1}{k}(x - a) \text{ pre } k \neq 0 \\ & y = -\frac{x}{k} + \frac{a}{k} + ka + q \\ & y = -\frac{x}{k} + \frac{a + qk + ak^2}{k} \end{aligned}$$

Pre $k = 0$ bude rovnica normály ku grafu funkcie f v bode A: $x = a$.

11. Nájdite rovnice dotyčníc k hyperbole $7x^2 - 2y^2 = 14$, ktoré sú kolmé na priamku $p : 2x + 4y - 3 = 0$.

Riešenie:

Smernicový tvar rovnice priamky p je $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{4}$, takže priamky kolmé na p budú mať smernicový tvar rovnice: $y = 2x + q$, kde $q \in \mathbb{R}$ je (zatiaľ) neznáma konštanta. V rovnici hyperboly $7x^2 - 2y^2 = 14$ sú zadané predpisy dvoch funkcií $y_1(x) = \sqrt{\frac{7}{2}x^2 - 7}$ a $y_2(x) = -\sqrt{\frac{7}{2}x^2 - 7}$, oboch definovaných na $(-\infty, -\sqrt{2}\rangle \cup \langle\sqrt{2}, \infty)$.

Nájsť body dotyku dotyčníc s hyperbolou môžeme pomocou derivácie oboch funkcií: ${y'}_1(x) = \frac{7x}{2\sqrt{\frac{7}{2}x^2-7}}$, resp. ${y'}_2(x) = -\frac{7x}{2\sqrt{\frac{7}{2}x^2-7}}$ definovaných na $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$. Pretože dotyčnice k hyperbole musia mať smernicu rovnú 2, tak x-ovú súradnicu každého z týchto bodov nájdeme z rovníc:

$$\frac{7x}{2\sqrt{\frac{7}{2}x^2-7}} = 2 \tag{12}$$

$$-\frac{7x}{2\sqrt{\frac{7}{2}x^2-7}} = 2 \tag{13}$$

Zrejme hľadané x z rovnice (12) musí byť také, že $x > \sqrt{2} > 0$ a x z rovnice (13) také, že $x < -\sqrt{2} < 0$. Každej z rovníc vyhovuje teda len jediné riešenie. Označme riešenie rovnice (12) ako x_A a riešenie rovnice (13) ako x_B, potom $x_A = 4$ a $x_B = -4$. Bod dotyku dotyčnice s grafom funkcie y_1 označme ako A a bod dotyku dotyčnice s grafom funkcie y_2 označme ako B. Potom $A = (4, 7)$ a $B = (-4, -7)$. Rovnice dotyčníc sú nasledujúce:

$$t_A: \quad y - 7 = 2(x-4), \qquad t_B: \quad y + 7 = 2(x+4)$$
$$\qquad y = 2x - 1 \qquad\qquad\qquad y = 2x + 1$$

12. Vypočítajte približnú hodnotu funkcie $f(x) = \sqrt{\frac{7}{2}x^2 - 7}$ v bode $x = 4,04$.

Riešenie:

Funkcia f sa zhoduje s funkciou y_1 z predchádzajúceho príkladu. Jej približnú hodnotu vieme určiť z rovnice dotyčnice ku grafu tejto funkcie v bode $(4, 7)$: $y = 2x - 1$. Konkrétne: $f(4,04) \doteq 2.4,04 - 1 = 8,08 - 1 = 7,08$. (Na porovnanie skutočná hodnota funkcie f v $4,04$ zaokrúhlená na štyri desatinné miesta: $f(4,04) \doteq 7,0799$.)

13. Vypočítajte limity. Na výpočet použite l'Hospitalovo pravidlo.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$

Riešenie:

Ak máme použiť na výpočet l'Hospitalovo pravidlo, mali by sme vedieť ako znie:
Nech $f, g : A \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod A, nech:
1) f, g sú spojité a diferencovateľné na $A \setminus \{a\}$,
2) pre každé $x \in A \setminus \{a\}$: $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$,
3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$
Ak existuje $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a rovnajú sa.
Pozn.:
Veta platí v tom istom znení, aj keď podmienku 3) nahradíme podmienkou $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$.

V prípade $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$ ide naozaj o limitu typu "$\frac{0}{0}$" takú, že funkcie v čitateli a menovateli zlomku sú spojité a diferencovateľné na dostatočne veľkom okolí bodu 0, pričom je splnená podmienka 2) l'Hospitalovho pravidla na tomto okolí. Aplikujúc preto l'Hospitalovo pravidlo na túto limitu, dostávame:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\mathrm{e}^x-1)}{\ln(1-x^2)}$

Riešenie:

l'Hospitalovho pravidlo môžeme použiť aj viackrát po sebe:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(\mathrm{e}^x-1)}{\ln(1-x^2)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x}{\frac{-2x}{1-x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2-1)\left(\mathrm{e}^x(x+1)-1\right)}{2x} \overset{\text{L'H}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\left(\mathrm{e}^x(x+1)-1\right)+(x^2-1)\left(\mathrm{e}^x(x+2)\right)}{2} = \frac{0-2}{2} = -1.$$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\pi-2\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)$

Riešenie:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\pi-2\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi-2\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{=}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x^2+1}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2.$$

To, že $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi-2\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\frac{1}{x}}$ je naozaj limita typu "$\frac{0}{0}$" vychádza z toho, že:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+1-1}{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2+1}} = 1$$

a teda pre $x\to\infty$ podiel $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sa blíži k 1 po číslach menších ako jedna, následne preto $\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ ide k $\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$. Zároveň:

$$\begin{aligned}\left(1-2\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)' &= \frac{-2}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)}}\,\frac{\sqrt{x^2+1}-x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\\ &= \frac{-2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-2}{x^2+1}.\end{aligned}$$

(d) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}$

Riešenie:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1} = \lim_{x\to 0+} \frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x} =$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}.$$

(e) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln(11x)}{\ln(15x)}$

Riešenie:

Pre $x \to 0+$ ide logaritmus v čitateli aj v menovateli do $-\infty$, takže v tomto prípade ide o limitu typu "$\frac{-\infty}{-\infty}$".

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(11x)}{\ln(15x)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{11}{11x}}{\frac{15}{15x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1.$$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\mathrm{e}^{1-x^2}}{x^2}$

Riešenie:

Limita je rovná nule, pretože:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\mathrm{e}^{1-x^2}}{x^2} = \frac{1+0}{\infty} = 0.$$

Limita spĺňa podmienky l'Hospitalovho pravidla a preto je možné ju vypočítať aj za jeho pomoci:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\mathrm{e}^{1-x^2}}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-2x\mathrm{e}^{1-x^2}}{2x} = \lim_{x\to\infty} -\mathrm{e}^{1-x^2} = 0.$$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} + 2\cos x - \sin x}{4\mathrm{e}^x + 5\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 3\sin x}$

Riešenie:

Ide o limitu typu "$\frac{\infty}{\infty}$", pretože pre $x \to \infty$ ide e^x do nekonenčna, $\mathrm{e}^{-x} \to 0$ a limity $\sin x$, resp. $\cos x$ síce neexistujú, ale funkcie sin aj cos sú ohraničené. Všetky podmienky l'Hospitalovho pravidla sú splnené, takže ho je možné použiť. Je to síce možné (dokonca opakovane), ale úplne nevhodné, pretože:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} + 2\cos x - \sin x}{4\mathrm{e}^x + 5\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 3\sin x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x} - 2\sin x - \cos x}{4\mathrm{e}^x - 5\mathrm{e}^{-x} + \sin x + 3\cos x} \overset{\text{L'H}}{=}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} - 2\cos x + \sin x}{4\mathrm{e}^x + 5\mathrm{e}^{-x} + \cos x - 3\sin x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x} + 2\sin x + \cos x}{4\mathrm{e}^x - 5\mathrm{e}^{-x} - \sin x - 3\cos x} \overset{\text{L'H}}{=}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} + 2\cos x - \sin x}{4\mathrm{e}^x + 5\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 3\sin x}$$

Došlo k zacykleniu a ďalším používaním l'Hospitalovho pravidla sa k riešeniu o nič bližšie neprepracujeme.
To však neznamená, že limita neexistuje. Limita existuje a má riešenie. Veľmi rýchlo ho možno nájsť elementárnymi postupmi:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} + 2\cos x - \sin x}{4\mathrm{e}^x + 5\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 3\sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x\left(3 - 2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{(2\cos x - \sin x)}{\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(4 + 5\mathrm{e}^{-2x} + \frac{(-\cos x + 3\sin x)}{\mathrm{e}^x}\right)} = \frac{3}{4}.$$

14. Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$.

Riešenie:

1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, funkcia má jediný nulový bod $x = 1$ ($f(1) = 0$), priesečník s osou $\mathcal{O}_y$ je bod $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$, pretože $f(0) = -\frac{1}{4}$.
2. Z asymetrickosti definičného oboru vyplýva, že funkcia nie je párna, ani nepárna a nie je ani periodická.

3. Funkcia je spojitá (ide o podiel spojitých funkcií). Asymptotou bez smernice (ďalej ABS) je priamka $x = -2$, pretože

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = \frac{-27}{0+} = -\infty \tag{14}$$

4. Vypočítajme deriváciu funkcie f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(x-1)^2(x+2)^2 - 2(x+2)(x-1)^3}{(x+2)^4} = \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+2)^4}\left(3(x+2) - 2(x-1)\right) \\ &= \frac{(x-1)^2}{(x+2)^3}(3x+6-2x+2) = \frac{(x-1)^2(x+8)}{(x+2)^3} \end{aligned} \tag{15}$$

Derivácia je nulová v $x = 1$, $x = -8$ a v bode $x = -2$ nie je definovaná. Výraz $(x-1)^2$ je kladný pre všetky $x \neq 1$. Výrazy $(x+8)$ a $(x+2)^3$ menia znamienko podľa toho, či je $x > -8$ alebo $x < -8$, resp. $x > -2$ alebo $x < -2$. Presnejšie $x + 8 > 0$, ak $x > -8$ a $x + 8 < 0$, ak $x < -8$. Podobne $(x+2)^3 > 0$, ak $x > -2$ a $(x+2)^3 < 0$, ak $x < -2$. Súhrnne:

$$\begin{array}{cc} f'(x) > 0 & \text{ak } x \in (-\infty, -8) \\ f'(x) = 0 & \text{ak } x = -8 \\ f'(x) < 0 & \text{ak } x \in (-8, -2) \\ f'(x) \text{ nie je definovaná} & \text{ak } x = -2 \\ f'(x) > 0 & \text{ak } x \in (-2, 1) \\ f'(x) = 0 & \text{ak } x = 1 \\ f'(x) > 0 & \text{ak } x \in (1, \infty) \end{array}$$

Intervaly monotónnosti funkcie:

$$\begin{array}{c} f \text{ je rastúca na intervale } (-\infty, -8\rangle \\ f \text{ je klesajúca na intervale } \langle -8, -2) \\ f \text{ je rastúca na intervale } (-2, \infty) \end{array}$$

5. Funkcia má ostré lokálne maximum v bode $x = -8$ a jeho hodnota je $f(-8) = -\frac{81}{4}$.

6. Druhú deriváciu funkcie f získame derivovaním prvej derivácie (15):

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(2(x-1)(x+8) + (x-1)^2\right)(x+2)^3 - 3(x+2)^2(x-1)^2(x+8)}{(x+2)^6} \\ &= \frac{(x-1)(x+2)^2}{(x+2)^6}\left((2x+16+x-1)(x+2) - 3(x-1)(x+8)\right) \\ &= \frac{(x-1)}{(x+2)^4}\left(3(x+5)(x+2) - 3(x-1)(x+8)\right) \\ &= \frac{3(x-1)}{(x+2)^4}\big((x^2+7x+10) - (x^2+7x-8)\big) = \frac{54(x-1)}{(x+2)^4} \end{aligned} \tag{16}$$

Druhá derivácia je definovaná všade okrem bodu -2. Výraz $(x+2)^4$ nachádzajúci sa v jej menovateli je kladný pre všetky $x \neq -2$. O znamienku druhej derivácie rozhoduje výraz $(x-1)$. Máme:

$$\begin{array}{cc} f''(x) < 0 & \text{ak } x \in (-\infty, -2) \\ f''(x) \text{ nie je definovaná} & \text{ak } x = -2 \\ f''(x) < 0 & \text{ak } x \in (-2, 1) \\ f''(x) = 0 & \text{ak } x = 1 \\ f''(x) > 0 & \text{ak } x \in (1, \infty) \end{array}$$

Pre funkciu f teda platí:

$$f \text{ je konkávna na intervale } (-\infty,-2)$$
$$f \text{ je konkávna na intervale } (-2,1\rangle$$
$$f \text{ je konvexná na intervale } \langle 1,\infty)$$

7. Inflexný bod funkcie f sa nachádza v bode 1, pričom $f(1)=0$.
8. Pre limity v krajných bodoch definičného oboru platí:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+4x+4} = \infty \tag{17}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+4x+4} = -\infty \tag{18}$$

Asymptoty so smernicou (ďalej ASS) $y=kx+q$ počítame v $+\infty$ aj v $-\infty$. Počítajme najprv v $+\infty$:

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3+4x^2+4x} = 1\\
q &= \lim_{x\to\infty} f(x)-kx = \lim_{x\to\infty} f(x)-x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+4x+4} - x\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x^2+3x-1-x^3-4x^2-4x}{x^2+4x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{-7x^2-x-1}{x^2+4x+4} = -7
\end{aligned}$$

Čiže ASS v $+\infty$ je priamka $y=x-7$.
Počítajme ASS v $-\infty$:

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3+4x^2+4x} = 1\\
q &= \lim_{x\to-\infty} f(x)-kx = \lim_{x\to-\infty} f(x)-x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+4x+4} - x\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x^2+3x-1-x^3-4x^2-4x}{x^2+4x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-7x^2-x-1}{x^2+4x+4} = -7
\end{aligned}$$

Čiže ASS v $-\infty$ je takisto priamka $y=x-7$.
9. Pretože funkcia f je spojitá na intervale $(-2,-\infty)$ a platí (14) i (17), tak $H(f)=(-\infty,\infty)$.

15. Vyšetrite priebeh funkcie $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

Riešenie:

1. Pretože $D(\arcsin)=\langle -1,1\rangle$, tak pre všetky $x\in D(f)$ musí platiť:

$$\begin{aligned}
-1 \le &\quad \frac{2x}{x^2+1} &\le 1\\
-x^2-1 \le &\quad 2x &\le x^2+1\\
-x^2-2x-1 \le &\quad 0 &\le x^2-2x+1\\
-(x+1)^2 \le &\quad 0 &\le (x-1)^2,
\end{aligned}$$

čo je pravda pre všetky $x\in\mathbb{R}$ a teda $D(f)=\mathbb{R}$. Funkcia má jediný nulový bod $x=0$ ($f(0)=0$).
2. Z toho, že funkcia má jediný nulový bod, vyplýva, že nie je periodická. Z toho, že arcsin je nepárna funkcia vyplýva, že f je nepárna:

$$f(-x)=\arcsin\left(\frac{2(-x)}{(-x)^2+1}\right)=\arcsin\left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)=-\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)=-f(x)$$

pre všetky $x \in D(f)$. f nie je párna, pretože napr. $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$, kým $f(1) = \frac{\pi}{2}$.
3. Funkcia je spojitá (ide o zloženie spojitých funkcií). ABS funkcia f nemá.
4. Vypočítajme deriváciu funkcie f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{1 - \dfrac{4x^2}{(x^2+1)^2}}} \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{x^4+2x^2+1-4x^2}{(x^2+1)^2}}} \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2}{\dfrac{\sqrt{x^4-2x^2+1}}{(x^2+1)}} \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{\sqrt{(x^2-1)^2}} \frac{1-x^2}{(x^2+1)} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)|1-x^2|} \end{aligned}$$

Z toho vyplýva:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2+1} & \text{pre } x \in (-1,1) \\ \dfrac{-2}{x^2+1} & \text{pre } x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \end{cases}$$

V bodoch $x = -1$ a $x = 1$ derivácia funkcie f neexistuje. Presnejšie:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x\to-1-} \frac{\arcsin\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right) + \dfrac{\pi}{2}}{x+1} = \lim_{x\to-1-} \frac{-2}{x^2+1} = -1 \\ \lim_{x\to-1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x\to-1+} \frac{\arcsin\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right) + \dfrac{\pi}{2}}{x+1} = \lim_{x\to-1-} \frac{2}{x^2+1} = 1 \\ \lim_{x\to1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1-} \frac{\arcsin\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right) - \dfrac{\pi}{2}}{x-1} = \lim_{x\to1-} \frac{2}{x^2+1} = 1 \\ \lim_{x\to1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1+} \frac{\arcsin\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right) - \dfrac{\pi}{2}}{x-1} = \lim_{x\to1+} \frac{-2}{x^2+1} = -1 \end{aligned}$$

Z predchádzajúceho dostávame:

$$\begin{array}{cc} f'(x) < 0 & \text{ak } x \in (-\infty,-1) \\ f'(x) \text{ nie je definovaná} & \text{ak } x = -1 \\ f'(x) > 0 & \text{ak } x \in (-1,1) \\ f'(x) \text{ nie je definovaná} & \text{ak } x = 1 \\ f'(x) < 0 & \text{ak } x \in (1,\infty) \end{array}$$

Intervaly monotónnosti funkcie:

$$\begin{gathered} f \text{ je klesajúca na intervale } (-\infty,-1\rangle \\ f \text{ je rastúca na intervale } \langle -1,1\rangle \\ f \text{ je klesajúca na intervale } \langle 1,\infty) \end{gathered}$$

5. Funkcia má ostré lokálne (globálne) minimum v bode $x = -1$ a jeho hodnota je $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$. Funkcia má ostré lokálne (globálne) maximum v bode $x = 1$ a jeho hodnota je $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$.
6. Z prvej derivácie funkcie f vyplýva:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2} & \text{pre } x \in (-1,1) \\ \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{pre } x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \end{cases}$$

Druhá derivácia nie je definovaná v bodoch -1 a 1. Súhrnne máme:

$$\begin{array}{cc} f''(x) < 0 & \text{ak } x \in (-\infty,-1) \\ f''(x) \text{ nie je definovaná} & \text{ak } x = -1 \\ f''(x) > 0 & \text{ak } x \in (-1,0) \\ f''(x) = 0 & \text{ak } x = 0 \\ f''(x) < 0 & \text{ak } x \in (0,1) \\ f''(x) \text{ nie je definovaná} & \text{ak } x = 1 \\ f''(x) > 0 & \text{ak } x \in (1,\infty) \end{array}$$

Pre funkciu f teda platí:

$$\begin{array}{c} f \text{ je konkávna na intervale } (-\infty,-1\rangle \\ f \text{ je konvexná na intervale } \langle -1,0\rangle \\ f \text{ je konkávna na intervale } \langle 0,1\rangle \\ f \text{ je konvexná na intervale } \langle 1,\infty) \end{array}$$

7. Inflexný bod funkcie f sa nachádza v bode 0, pričom $f(0) = 0$.
8. Pre limity v krajných bodoch definičného oboru platí:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = \arcsin(0) = 0 \tag{19}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = \arcsin(0) = 0 \tag{20}$$

Z (19) a (20) vyplýva, že ASS v $+\infty$ aj v $-\infty$ je priamka $y = 0$.
9. Vzhľadom k bodu 5. a vzhľadom k tomu, že funkcia f je spojitá na celom $\mathbb{R}$ máme $H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.

16. Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin 2x}$.

Riešenie:

1. Pre všetky $x \in D(f)$ musí platiť:

$$\begin{aligned} \sin 2x &\neq 0 \\ 2x &\neq k\pi;\ \text{kde } k \in \mathbb{Z} \\ x &\neq k\frac{\pi}{2};\ \text{kde } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Z toho vyplýva $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$. Funkcia nemá žiaden nulový bod, pretože $\sin x = 0$ práve vtedy, keď $x = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, lenže tieto body nepatria $D(f)$.
2. Upravme predpis funkcie:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{\sin x}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{2\cos x} \tag{21}$$

Vzhľadom k definičnému oboru funkcie a z toho, že funkcia cos je 2π-periodická, vyplýva, že f je 2π-periodická. Z toho, že cos je párna funkcia máme, že f je párna:

$$f(-x) = \frac{1}{2\cos(-x)} = \frac{1}{2\cos(x)} = f(x)$$

pre všetky $x \in D(f)$. f nie je nepárna, pretože napr. $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
3. Funkcia je spojitá (ide o podiel spojitých funkcií). ABS funkcie f sú priamky $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, pretože:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)-} f(x) &= \lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)-} \frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{0-} = -\infty \\
\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+} f(x) &= \lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+} \frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{0+} = \infty \\
\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)-} f(x) &= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)-} \frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{0+} = \infty \\
\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+} f(x) &= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+} \frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{0-} = -\infty
\end{aligned}$$

kým:

$$\lim_{x \to k\pi} f(x) = \lim_{x \to k\pi} \frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{2(-1)^k} = (-1)^k \frac{1}{2}. \tag{22}$$

4. Vypočítajme deriváciu funkcie f:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\cos x}\right)' = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \tag{23}$$

Z (23) a $D(f)$ máme:

$$\begin{array}{cc}
f'(x) > 0 & \text{na intervaloch } \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\
f'(x) > 0 & \text{na intervaloch } \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (2k+1)\pi\right) \\
f'(x) < 0 & \text{na intervaloch } \left((2k+1)\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) \\
f'(x) < 0 & \text{na intervaloch } \left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi\right) \\
f'(x) \text{ nie je definovaná} & \text{v bodoch } x = k\frac{\pi}{2};\ \text{kde } k \in \mathbb{Z}.
\end{array}$$

Intervaly monotónnosti funkcie:

$$\begin{array}{c}
f \text{ je rastúca na intervaloch } \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \\
f \text{ je rastúca na intervaloch } \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (2k+1)\pi\right), \\
f \text{ je klesajúca na intervaloch } \left((2k+1)\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right), \\
f \text{ je klesajúca na intervaloch } \left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi\right),
\end{array}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$.
5. Z predchádzajúceho vyplýva, že funkcia nemá žiaden extrém.
6. Druhá derivácia funkcie f:

$$f''(x) = \frac{\cos^3 x + 2\sin^2 x \cos x}{2\cos^4 x} = \frac{1 + \sin^2 x}{2\cos^3 x} \tag{24}$$

Z (24) dostávame:

$$\begin{array}{cc}
f''(x) < 0 & \text{na intervaloch } \left(-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, -\pi + 2k\pi\right) \\
f''(x) < 0 & \text{na intervaloch } \left(-\pi + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\
f''(x) > 0 & \text{na intervaloch } \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi\right) \\
f''(x) > 0 & \text{na intervaloch } \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\
f''(x) \text{ nie je definovaná} & \text{v bodoch } x = k\frac{\pi}{2};\ \text{kde } k \in \mathbb{Z}.
\end{array}$$

Pre funkciu f teda platí:

$$f \text{ je konkávna na intervaloch } \left(-\tfrac{3}{2}\pi + 2k\pi, -\pi + 2k\pi\right),$$
$$f \text{ je konkávna na intervaloch } \left(-\pi + 2k\pi, -\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right),$$
$$f \text{ je konvexná na intervaloch } \left(-\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi\right),$$
$$f \text{ je konvexná na intervaloch } \left(2k\pi, \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right),$$

kde $k \in \mathbb{Z}$.
7. Z predchádzajúceho vyplýva, že funkcia nemá žiaden inflexný bod.
8. Vzhľadom k $D(f)$ dostávame, že funkcia nemá ASS ani $+\infty$, ani v $-\infty$.
9. Zo spojitosti funkcie f, jej intervalov monotónnosti a z (22) máme, že $H(f) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.