1. Vypočítajte limity alebo ukážte, že neexistujú:

(a) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^4+5x^3-17x^2-120x-144}{x^3+7x^2+8x-16}$

Riešenie:

Označme $f(x)=x^4+5x^3-17x^2-120x-144$ a $g(x)=x^3+7x^2+8x-16$. Potom $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ je typu "$\frac{0}{0}$", pretože $f(-4)=0=g(-4)$. Navyše číslo -4 je dvojnásobným koreňom polynómu f ako aj g, čo ľahko vidno z Hornerovej schémy:

pre f:	1	5	-17	-120	-144	pre g:	1	7	8	-16
-4		-4	-4	84	144	**-4**		-4	-12	16
	1	1	-21	-36	0		1	3	-4	0
-4		-4	12	36		**-4**		-4	4	
	1	-3	-9	0			1	-1	0	
-4		-4	28			**-4**		-4		
	1	-7	19				1	-5		

Preto:

$$\lim_{x\to-4}\frac{x^4+5x^3-17x^2-120x-144}{x^3+7x^2+8x-16}=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)^2(x^2-3x-9)}{(x+4)^2(x-1)}=$$
$$=\lim_{x\to-4}\frac{x^2-3x-9}{x-1}=\frac{19}{-5}=-\frac{19}{5}$$

(b) $\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{x^4+5x^3-17x^2-120x-144}{x^3+7x^2+8x-16}$

Riešenie:

Z časti (a) príkladu máme:

$$\frac{x^4+5x^3-17x^2-120x-144}{x^3+7x^2+8x-16}=\frac{(x+4)^2(x^2-3x-9)}{(x+4)^2(x-1)}$$

Preto:

$$\lim_{x\to1+}\frac{x^4+5x^3-17x^2-120x-144}{x^3+7x^2+8x-16}=\lim_{x\to1+}\frac{(x+4)^2(x^2-3x-9)}{(x+4)^2(x-1)}=\frac{-11}{0+}=-\infty$$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+5x^3-17x^2-120x-144}{x^3+7x^2+8x-16}$

Riešenie:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+5x^3-17x^2-120x-144}{x^3+7x^2+8x-16}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\left(1+\frac{5}{x}-\frac{17}{x^2}-\frac{120}{x^3}-\frac{144}{x^4}\right)}{x^3\left(1+\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{16}{x^3}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{5}{x}-\frac{17}{x^2}-\frac{120}{x^3}-\frac{144}{x^4}\right)}{\left(1+\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{16}{x^3}\right)}=-\infty$$

(d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{50}-2x+1}{x^{100}-2x+1}$

Riešenie:

Označme $f(x)=x^{50}-2x+1$ a $g(x)=x^{100}-2x+1$. Potom $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ je typu "$\frac{0}{0}$", pretože $f(1)=0=g(1)$. Upravme $f(x)$ aj $g(x)$ pomocou Hornerovej schémy:

	1	0	0	...	0	-2	1
1		1	1	...	1	1	-1
	1	1	1	...	1	-1	0

Čiže:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{50}-2x+1}{x^{100}-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{49}+x^{48}+\ldots+x-1)}{(x-1)(x^{99}+x^{98}+\ldots+x-1)}=\frac{49-1}{99-1}=\frac{48}{98}=\frac{24}{49}$$

(e) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{50}-2x+1}{x^{100}-2x+1}$

Riešenie:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{50}-2x+1}{x^{100}-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{50}\left(1-\frac{2}{x^{49}}+\frac{1}{x^{50}}\right)}{x^{100}\left(1-\frac{2}{x^{99}}+\frac{1}{x^{100}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{x^{49}}+\frac{1}{x^{50}}\right)}{x^{50}\left(1-\frac{2}{x^{99}}+\frac{1}{x^{100}}\right)}=0$$

(f) $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2+4|1-x|}{2x^2-3x+1}$

Riešenie:

$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2+4|1-x|}{2x^2-3x+1}$ neexistuje, pretože:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)^2+4|1-x|}{2x^2-3x+1} &= \lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)^2+4(x-1)}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(x-1+4)}{2x^2-3x+1}\\ &= \lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(2x-1)}=\lim_{x\to 1+}\frac{x+3}{2x-1}=\frac{4}{1}=4,\end{aligned}$$

kým:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)^2+4|1-x|}{2x^2-3x+1} &= \lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)^2+4(1-x)}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(x-1-4)}{2x^2-3x+1}\\ &= \lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(2x-1)}=\lim_{x\to 1-}\frac{x-5}{2x-1}=\frac{-4}{1}=-4.\end{aligned}$$

(g) $\lim_{x\to -\infty}\frac{(x-1)^2+4|1-x|}{2x^2-3x+1}$

Riešenie:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty}\frac{(x-1)^2+4|1-x|}{2x^2-3x+1} &= \lim_{x\to -\infty}\frac{(x-1)^2+4(1-x)}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(2x-1)}\\ &= \lim_{x\to -\infty}\frac{(x-5)}{(2x-1)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1-\frac{5}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(h) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+2}{x^4-2x^2+1}$

Riešenie:

Ide o limitu typu "$\frac{1}{0}$". Výraz v menovateli možno ľahko upraviť tak, aby bolo jasné, že pre $x\to 1$ ide (x^4-2x^2+1) k nule po kladných číslach:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+2}{x^4-2x^2+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+2}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{0+}=\infty$$

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x+2}{x^4-x^2}$

Riešenie:

Ide opäť o limitu typu "$\frac{1}{0}$"rovnako ako v časti (h) príkladu, ale limita neexistuje, pretože:

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x^3-2x+2}{x^4-x^2} = \lim_{x\to 1+} \frac{x^3-2x+2}{x^2(x^2-1)} = \frac{1}{0+} = \infty,$$

kým:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^3-2x+2}{x^4-x^2} = \lim_{x\to 1-} \frac{x^3-2x+2}{x^2(x^2-1)} = \frac{1}{0-} = -\infty.$$

(j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{2-x}}{x^2+3x-4}$

Riešenie:

Ide o limitu typu "$\frac{0}{0}$". Výraz v čitateli sa dá upraviť pomocou vzťahu: $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$. Potom:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[3]{2-x}}{x^2+3x-4} &= \lim_{x\to 1} \frac{\left(1-\sqrt[3]{2-x}\right)}{(x^2+3x-4)} \frac{\left(1+\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2\right)}{\left(1+\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1-\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3}{(x^2+3x-4)\left(1+\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1-(2-x)}{(x-1)(x+4)\left(1+\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+4)\left(1+\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+4)\left(1+\sqrt[3]{2-x}+\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2\right)} \\
&= \frac{1}{5(1+1+1)} = \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

Prípadne môžete na výpočet použiť substitúciu:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[3]{2-x}}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[3]{2-x}}{(2-x)^2-7(2-x)+6} = \left| \begin{array}{c} t=\sqrt[3]{2-x} \\ t^3 = 2-x \\ x\to 1;\, t\to 1 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{1-t}{t^6-7t^3+6} = \lim_{t\to 1} \frac{(-1)(t-1)}{(t-1)(t^5+t^4+t^3-6t^2-6t-6)} = \lim_{t\to 1} \frac{-1}{(t^3-6)(t^2+t+1)} =$$

$$= \frac{-1}{(-5)(1+1+1)} = \frac{1}{15}$$

(k) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x+10}+x}{x^2-4}$

Riešenie:

Ide o limitu typu "$\frac{0}{0}$". Na výpočet použijeme substitúciu:

$$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x+10}+x}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x+10}+x+10-10}{(x+10)^2-20(x+10)+96} = \left| \begin{array}{c} t=\sqrt[3]{x+10} \\ t^3 = x+10 \\ x\to -2;\, t\to 2 \end{array} \right| =$$

$$\lim_{t\to 2}\frac{t+t^3-10}{t^6-20t^3+96}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t^2+2t+5)}{(t-2)(t^5+2t^4+4t^3-12t^2-24t-48)}=$$
$$\lim_{t\to 2}\frac{t^2+2t+5}{(t^3-12)(t^2+2t+4)}=\frac{13}{(-4)(13-1)}=-\frac{13}{48}$$

(l) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}$

Riešenie:

V skutočnosti ide o limitu pre $x\to 3+$, pretože funkcia, ktorej limitu počítame, nie je pre $x<3$ definovaná. Táto limita je typu "$\frac{0}{0}$". Použijeme elementárne úpravy na jej nájdenie:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3})}{\sqrt{x^2-3^2}}\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3+\sqrt{x-3}(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\sqrt{x-3}\sqrt{x+3}(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-3}(\sqrt{x-3}+\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\sqrt{x-3}\sqrt{x+3}(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\frac{0+\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

(m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$

Riešenie:

Ide o limitu typu "$\frac{0}{0}$". Použijeme elementárne úpravy na jej nájdenie:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)}{\left(1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}\frac{\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}{\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}{1-1+\frac{x}{2}}=$$
$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)=$$
$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1+1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1}{x}-4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}-1}{x}=$$
$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1\right)}{x}\frac{\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}+1\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}+1\right)}+$$
$$(-4)\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}-1\right)}{x}\left(\frac{\left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)^3+\left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)^2+\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}+1}{\left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)^3+\left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)^2+\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}+1}\right)=$$
$$\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}\right)^3-1}{x}-\frac{4}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)^4-1}{x}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{4x}=\frac{4}{9}-\frac{1}{4}=\frac{7}{36}$$

(n) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1}$

Riešenie:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+4)-(x+1)}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}}=0\end{aligned}$$

(o) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\cos(2x)}{\sin(3x)}$

Riešenie:

Pretože $\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-1}{2}$ a $\sin\left(3\frac{\pi}{3}\right)=\sin\pi=0$, ide o limitu typu "$\frac{0}{0}$".

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\cos(2x)}{\sin(3x)} = \left|\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\cos x}{2}\right| = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{-\frac{1-\cos x}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)}{\sin(3x)} =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos x+\cos(2x)}{\sin(3x)} = \left|\cos(2x)=2\cos^2 x-1\right| =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{-\cos x+2\cos^2 x}{\sin(3x)} = (-1)\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)}{\sin(3x)} =$$
$$= (-1)\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)}{(\sin(3x))}\frac{\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)}{\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)} = \left(\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{-\cos x}{\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)}\right)\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x-\frac{1}{4}}{\sin(3x)}\right) =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x-\frac{1}{4}}{\sin(3x)} = \left(-\frac{1}{8}\right)\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{4\cos^2 x-1}{\sin(3x)} = \left|\sin(3x)=\sin x(4\cos^2 x-1)\right| =$$
$$= \left(-\frac{1}{8}\right)\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{4\cos^2 x-1}{\sin x(4\cos^2 x-1)} = \left(-\frac{1}{8}\right)\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \sin^{-1}(x) = -\frac{1}{8}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{4\sqrt{3}}$$

(p) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$

Riešenie:

Na výpočet využijeme vzťah: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right) = \left|\begin{array}{c} t=\frac{2}{x} \\ x\to\infty;\ t\to 0+ \end{array}\right| = \lim_{t\to 0+} 2\frac{\sin t}{t} = 2\lim_{t\to 0+}\frac{\sin t}{t} = 2$$

(q) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin(x+3\pi)}{\pi-x}$

Riešenie:

Na výpočet využijeme vzťah: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x+3\pi)}{\pi-x} = \left|\begin{array}{c} t=\pi-x \\ x\to\pi;\ t\to 0 \end{array}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(4\pi-t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(-t)}{t} =$$
$$= (-1)\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = -1$$

(r) $\lim\limits_{x\to 0} (\ln(1-x))\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

Riešenie:

Pre $x\to 0$ ide $(\ln(1-x))$ k nule, pretože $\ln 1=0$. Na druhej strane $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ neexistuje. Funkcia sínus je však ohraničená a teda $\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ je rovnako ohraničená na $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ (a teda aj na $(-\infty,0)\cup(0,1)$). $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1-x))\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ je teda typu "0.ohraničená" a preto $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1-x))\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=0$.

Presnejšie:

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) &\leq 1 && \text{pre } x > 0 \\ g(x) := \ln(1-x) < \ln 1 &= 0 && \text{pre } 0 < x < 1 \\ -\ln(1-x) \geq (\ln(1-x))\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) &\geq \ln(1-x) && \text{pre } 0 < x < 1 \\ -g(x) \to 0+ \ \text{ pre } x &\to 0+ && g(x) \to 0- \ \text{ pre } x \to 0+ \\ \text{Čiže } \ (\ln(1-x))\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) &\to 0 && \text{pre } x \to 0+ \end{aligned}$$

Podobne:

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) &\leq 1 && \text{pre } x < 0 \\ g(x) := \ln(1-x) > \ln 1 &= 0 && \text{pre } x < 0 \\ -\ln(1-x) \leq (\ln(1-x))\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) &\leq \ln(1-x) && \text{pre } x < 0 \\ -g(x) \to 0- \ \text{ pre } x &\to 0- && g(x) \to 0+ \ \text{ pre } x \to 0- \\ \text{Čiže } \ (\ln(1-x))\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) &\to 0 && \text{pre } x \to 0- \end{aligned}$$

(s) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{3\pi} - \cos x}{x}$

Riešenie:

Pre $x \to \infty$ ide $\frac{1}{x}$ do nuly, preto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3\pi} - \cos x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\sqrt{3\pi} - \cos x\right) = 0.\text{ohraničená} = 0$$

2. Vyšetrite spojitosť funkcie f v bode a, ak:

(a) $a = 0$ a $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}, & \text{pre } x \neq 0; \\ 0, & \text{pre } x = 0. \end{cases}$

Riešenie:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}} =$$

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.\text{ohraničená} = 0 = f(0) = f(a).$$

Platí teda $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, čiže funkcia f je spojitá v bode a.

(b) $a = 2$ a $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 5x + 2}{x^2 + x - 6}, & \text{pre } x \neq 2; \\ \dfrac{5}{7}, & \text{pre } x = 2. \end{cases}$

Riešenie:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x+2}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x-1)}{(x-2)(x+3)} =$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-1}{x+3} = \frac{7}{5} \neq \frac{5}{7} = f(2) = f(a).$$

Teda $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, čiže funkcia f nie je spojitá v bode a.

(c) $a = 0$ a $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}(2x)}{x}, & \text{pre } x > 0; \\ \mathrm{e}^{2x} + 2\cos(2x), & \text{pre } x \leq 0. \end{cases}$

Riešenie:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(2x)}{x\cos(2x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\sin x\cos x}{x\cos(2x)} =$$
$$= \left(\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0+} \frac{2\cos x}{\cos(2x)}\right) = 2 \neq 3 = f(0).$$

Teda $\lim_{x\to a+} f(x) \neq f(a)$, čiže funkcia f nie je spojitá v bode a.

(d) $a = 0$ a $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2+|x|}{\mathrm{e}^x-1}, & \text{pre } x > 0; \\ 2+|x|, & \text{pre } x \leq 0. \end{cases}$

Riešenie:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{2+|x|}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{2}{0+} = \infty.$$

Teda $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$, čiže funkcia f nie je spojitá v bode a.

(e) $a = 3$ a $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-9}, & \text{pre } x > 3; \\ \dfrac{1}{12}, & \text{pre } x = 3; \\ \dfrac{x^2-2x-3}{x^4-10x^2+9}, & \text{pre } x < 3. \end{cases}$

Riešenie:

$$\lim_{x\to 3+} f(x) = \lim_{x\to 3+} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-9} = \lim_{x\to 3+} \left(\frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-9}\right)\left(\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}+1}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 3+} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x-2}+1)} = \frac{1}{12}.$$
$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3-} \frac{x^2-2x-3}{x^4-10x^2+9} = \lim_{x\to 3-} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x^3+3x^2-x-3)} =$$
$$= \lim_{x\to 3-} \frac{x+1}{(x^2-1)(x+3)} = \lim_{x\to 3-} \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{12}.$$

Dostali sme $\lim_{x\to a+} f(x) = \dfrac{1}{12} = \lim_{x\to a-} f(x)$ a teda $\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{1}{12}$. Keďže $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, tak funkcia f je spojitá v bode a.