1. Nájdite všeobecný predpis a_n Fibonacciho postupnosti $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, tj. rekurentne $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, kde $a_1 = a_2 = 1$.

Riešenie:

Označme $x_n = a_n$ a $y_n = a_{n+1}$, potom $x_{n+1} = a_{n+1} = y_n$ a $y_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+1}+a_n = y_n + x_n$. Čiže máme sústavu dvoch diferenčných rovníc o dvoch neznámych:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n && (1) \\ y_{n+1} &= x_n + y_n && (2) \end{aligned}$$

Maticový zápis: $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, kde maticu sústavy $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ označme A. Nájdime vlastné čísla matice A (viď. 3.príklad z riešených príkladov na 1.-4.týždeň semestra), teda vyriešme úlohu:

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Rovnica:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \qquad (3)$$

má dve reálne riešenia $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, pričom $\lambda_1\lambda_2 = -1$ a $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, kde $\lambda_1 > 0$, kým $\lambda_2 < 0$. Číslo λ_1 sa nazýva zlatý rez. Reprezentuje pomer dĺžok častí tyče, ktorá bola rozrezaná v takom pomere, aby tento pomer bol rovnaký ako pomer dlhšej časti tyče ku kratšej časti a súčasne rovnaký ako pomer celkovej dĺžky tyče k dĺžke dlhšej časti tyče. Označme λ - tento pomer (samozrejme $\lambda > 0$), k - dĺžka dlhšej časti a m - dĺžka kratšej časti, potom:

$$\frac{k+m}{k} = \frac{k}{m} = \lambda \qquad (4)$$

Ak zlomok na ľavej strane rovnice (4) rozšírime podielom $\frac{m}{m}$, dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{k}{m} + \frac{m}{m}}{\frac{k}{m}} &= \frac{k}{m} \\ \frac{\lambda + 1}{\lambda} &= \lambda \\ \lambda + 1 &= \lambda^2 \\ \lambda^2 - \lambda - 1 &= = 0, \end{aligned}$$

čo je rovnica (3), ktorá má jediné kladné riešenie $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Podobne ako v časti d) 3.príkladu z riešených príkladov na 1.-4.týždeň je možné nájsť regulárnu maticu U takú, že $A = U\Lambda U^{-1}$, kde $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Príslušná matica $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, pričom $U^{-1} = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$. Z toho vyplýva, že sústavu (1), (2) možno prepísať do tvaru:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = U\Lambda U^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

resp.:

$$U^{-1} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \Lambda U^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Označme $(z_n, w_n)^T = U^{-1} (x_n, y_n)^T$, tj. $z_n = \frac{\lambda_2 x_n - y_n}{\lambda_2 - \lambda_1}$ a $w_n = \frac{-\lambda_1 x_n + y_n}{\lambda_2 - \lambda_1}$, potom:

$$\begin{pmatrix} z_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

a teda dostávame:

$$z_{n+1} = \lambda_1 z_n \tag{5}$$

$$w_{n+1} = \lambda_2 w_n \tag{6}$$

Pre dané počiatočné z_1, resp. w_1 má rovnica (5), resp. (6) riešenie $z_n = \lambda_1^{n-1} z_1$, resp. $w_n = \lambda_2^{n-1} w_1$. V tomto prípade $z_1 = \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}$, $w_1 = \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$. Z uvedeného vyplýva:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_2 x_n - y_n}{\lambda_2 - \lambda_1} = z_n &= \lambda_1^{n-1} z_1 = \lambda_1^{n-1} \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{-\lambda_1 x_n + y_n}{\lambda_2 - \lambda_1} = w_n &= \lambda_2^{n-1} w_1 = \lambda_2^{n-1} \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned}$$

Po úprave:

$$\lambda_2 x_n - y_n = \lambda_1^{n-1}(\lambda_2 - 1) = -\lambda_1^n \tag{7}$$

$$-\lambda_1 x_n + y_n = \lambda_2^{n-1}(1 - \lambda_1) = \lambda_2^n \tag{8}$$

Sčítaním (7) a (8) dostaneme:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) x_n = -\lambda_1^n + \lambda_2^n$$

$$x_n = \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{9}$$

Platí $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}$. Označme $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (zlatý rez) jednoducho ako λ, potom z (9) máme:

$$a_n = \frac{\lambda^n - (-\lambda)^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{\lambda^n - (-\lambda)^{-n}}{2\lambda - 1} \tag{10}$$

2. Vypočítajte $\lim_{n \to \infty} b_n$, kde $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Fibonacciho postupnosť.

Riešenie:

Využijúc vzťah (10) pre n-tý člen a_n Fibonacciho postupnosti, dostávame, že:

$$b_n = \frac{\lambda^{n+1} - (-\lambda)^{-n-1}}{\lambda^n - (-\lambda)^{-n}} = \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n} \frac{(1 - (-1)^{n+1} \lambda^{-2n-2})}{(1 - (-1)^n \lambda^{-2n})} = \lambda \frac{\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{(\lambda^2)^{n+1}}\right)}{\left(1 - \frac{(-1)^n}{(\lambda^2)^n}\right)} \tag{11}$$

Pretože $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, tak:

$$0 < \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}} < 1. \tag{12}$$

Z (12) vyplýva, že $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\lambda^2}\right)^n = 0$. Rovnako tak:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{-1}{\lambda^2}\right)^n = 0. \tag{13}$$

Z (11) a z (13) dostávame:

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

3. Ukážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = (-1)^n$, nemá limitu.

Riešenie:

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \mathbb{R}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\right)$ práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $n \geq n_0$ platí: $|a_n - a| < \varepsilon$.
Nech $a \in \langle -1, 1\rangle$ je ľubovoľné. Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = (-1)^n$, nemá limitu $a \in \langle -1, 1\rangle$. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Pre akékoľvek veľké $n_0 \in \mathbb{N}$ budú hodnoty a_n pre všetky $n \geq n_0$ rovné buď 1 (pre párne n) alebo -1 (pre nepárne n). To znamená, že musí súčasne platiť: $|1 - a| < \varepsilon$ a $|-1 - a| < \varepsilon$. Keďže $a \in \langle -1, 1\rangle$, znamená to, že musí súčasne platiť: $1 - a < \varepsilon$ a $1 + a < \varepsilon$. To je možné splniť len pre $\varepsilon > 1$, čo je spor s predpokladom, že $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné.
Nech $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ je ľubovoľné. Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = (-1)^n$, nemá limitu $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Pre akékoľvek veľké $n_0 \in \mathbb{N}$ budú hodnoty a_n pre všetky $n \geq n_0$ rovné buď 1 (pre párne n) alebo -1 (pre nepárne n). To znamená, že musí súčasne platiť: $|1 - a| < \varepsilon$ a $|-1 - a| < \varepsilon$. Ak $a \in (1, \infty)$, znamená to, že musí súčasne platiť: $a - 1 < \varepsilon$ a $1 + a < \varepsilon$. Ak $a \in (-\infty, -1)$, tak musí súčasne platiť: $1 - a < \varepsilon$ a $-1 - a < \varepsilon$. Pre obe varianty je to možné splniť len keď $\varepsilon > 2$, čo je spor s predpokladom, že $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné.
Postupnosť má limitu $a = \infty$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $n \geq n_0$ platí: $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$. Keďže pre akékoľvek veľké $n_0 \in \mathbb{N}$ budú hodnoty a_n pre všetky $n \geq n_0$ rovné buď 1 (pre párne n) alebo -1 (pre nepárne n), uvedené nie je možné splniť pre nepárne n.
Postupnosť má limitu $a = -\infty$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $n \geq n_0$ platí: $a_n < -\frac{1}{\varepsilon}$. Keďže pre akékoľvek veľké $n_0 \in \mathbb{N}$ budú hodnoty a_n pre všetky $n \geq n_0$ rovné buď 1 (pre párne n) alebo -1 (pre nepárne n), uvedené nie je možné splniť pre párne n.

4. Ukážte, že neexistuje $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$.

Riešenie:

Z Heineho definície limity vyplýva, že $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x = b$, kde $b \in \mathbb{R}^*$, práve vtedy, keď pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov z množiny $D(\cos) = \mathbb{R}$ takú, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ platí: $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(x_n) = b$. Vezmime postupnosť bodov $x_n = n\pi$, potom naozaj $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ a $\cos(x_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Z predchádzajúceho príkladu vieme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = (-1)^n$, nemá limitu. Z čoho vyplýva, že neexistuje $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$.

5. Nájdite súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 4}{5^{n-1}}$.

Riešenie:

Na nájdenie súčtu tohto radu využijeme tvrdenie:
Nech $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú konvergentné rady, potom aj rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ je konvergentný a platí: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Upravujme:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+4}{5^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{5^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{(-1)^{n-1}}{5^{n-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}4\frac{1}{5^{n-1}}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\end{aligned}\tag{14}$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ je geometrický rad s kvocientom $-\frac{1}{5}$ a teda je konvergentný. Jeho súčet je:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{-1}{1-(-\frac{1}{5})}=\frac{-1}{\frac{6}{5}}=-\frac{5}{6}.\tag{15}$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ je geometrický rad s kvocientom $\frac{1}{5}$ a teda je konvergentný. Jeho súčet je:

$$\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{4}{1-(\frac{1}{5})}=\frac{4}{\frac{4}{5}}=5.\tag{16}$$

S využitím tvrdenia a (14), (15), (16) dostávame:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+4}{5^{n-1}}=-\frac{5}{6}+5=\frac{25}{6}.$$

6. Nájdite chybu v nasledujúcich úpravách:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{n+2}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n+2}}\\ &= \mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}}+\sum_{n=3}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n+2}}\\ &= \mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n+2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n+2}}\\ &= \mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

a nájdite skutočný súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{n+2}}$.

Riešenie:

Chyba je hneď v prvej úprave, pretože tento rad nemožno rozložiť na súčet dvoch konvergetných radov, keďže tieto rady nie sú konvergetné. Nespĺňajú nutnú podmienku konvergencie nekonečného radu, platí $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^0=1\neq 0$, rovnako ako $\lim\limits_{n\to\infty}-\mathrm{e}^{\frac{1}{n+2}}=-\mathrm{e}^0=-1\neq 0$. Zvolený postup na nájdenie súčtu radu je nesprávny a treba ho nájsť ako limitu postupnosti čiastočných súčtov:

$$\begin{aligned}s_1 &= \mathrm{e}-\sqrt[3]{\mathrm{e}}\\ s_2 &= \mathrm{e}-\sqrt[3]{\mathrm{e}}+\sqrt{\mathrm{e}}-\sqrt[4]{\mathrm{e}}\\ s_3 &= \mathrm{e}-\sqrt[3]{\mathrm{e}}+\sqrt{\mathrm{e}}-\sqrt[4]{\mathrm{e}}+\sqrt[3]{\mathrm{e}}-\sqrt[5]{\mathrm{e}}=\mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}}-\sqrt[4]{\mathrm{e}}-\sqrt[5]{\mathrm{e}}\\ s_4 &= \mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}}-\sqrt[4]{\mathrm{e}}-\sqrt[5]{\mathrm{e}}+\sqrt[4]{\mathrm{e}}-\sqrt[6]{\mathrm{e}}=\mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}}-\sqrt[5]{\mathrm{e}}-\sqrt[6]{\mathrm{e}}\\ &\vdots\\ s_n &= \mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{n+2}}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e} + \sqrt{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+2}} = \mathrm{e} + \sqrt{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e} + \sqrt{\mathrm{e}} - 2.$$

7. Nájdite súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

   Riešenie:

   Pretože pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, tak pre $x = 1$ máme $\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Čiže $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 1$.

8. Nájdite súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

   Riešenie:

   Rad je divergentný, pretože nespĺňa nutnú podmienku konvergencie nekonečného radu: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \cos 0 = 1 \neq 0$.

9. Vypočítajte $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{4^n}$.

   Riešenie:

   Podľa D'Alembertovho limitného kritéria rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$ konverguje:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^4}{4^{n+1}}}{\frac{n^4}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 = \frac{1}{4} < 1.$$

   Keďže je konvergentný, tak z nutnej podmienky konvergencie nekonečného radu vyplýva, že $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{4^n} = 0$.

10. Vyšetrite konvergenciu radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$.

    Riešenie:

    Použijeme D'Alembertovo limitné kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{3^n n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{3n^n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{\mathrm{e}}{3} < 1$$

    Teda rad je konvergentný.

11. Vyšetrite konvergenciu radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n^2 - 2n - 1}{5n^2 - 3n + 17}\right)^{2n}$.

    Riešenie:

Použijeme Cauchyho limitné kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{6n^2-2n-1}{5n^2-3n+17}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{6n^2-2n-1}{5n^2-3n+17}\right)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} > 1$$

Teda rad je divergentný.

12. Vyšetrite konvergenciu radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\pi 2^{n-2}}$.

Riešenie:

Použijeme porovnávacie kritérium:

$$0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{\operatorname{arctg} n}{\pi 2^{n-2}} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ pre všetky } n \in \mathbb{N} \tag{17}$$

Zo (17) máme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{2^{n-2}} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Čiže rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ je majorantným radom k radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\pi 2^{n-2}}$. Keďže je majorantný a konverguje (ide o geometrický rad s kvocientom $\frac{1}{2}$), tak podľa porovnávacieho kritéria je aj rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\pi 2^{n-2}}$ konvergentný.

13. Vyšetrite konvergenciu radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{(2n-\ln n)}$.

Riešenie:

Použijeme porovnávacie kritérium. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned}
-1 \leq &\quad \cos n &\leq 1 \\
1 \leq &\quad 2+\cos n &\leq 3 \\
\frac{1}{3} \leq &\quad \frac{1}{2+\cos n} &\leq 1 \\
-1 \leq &\quad -\frac{1}{2+\cos n} &\leq -\frac{1}{3} \\
1-1 \leq &\quad 1-\frac{1}{2+\cos n} &\leq 1-\frac{1}{3} \\
0 \leq &\quad \frac{1+\cos n}{2+\cos n} &\leq \frac{2}{3}
\end{aligned} \tag{18}$$

Zároveň pre všetky $n \in \mathbb{N}$ máme:

$$\begin{aligned}
\ln n &< n \\
-\ln n &> -n \\
2n - \ln n &> n
\end{aligned} \tag{19}$$

Z (18) a (19) pre všetky $n \in \mathbb{N}$ dostávame:

$$\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{(2n-\ln n)} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{(2n-\ln n)} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Čiže rad $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ je majorantným radom k radu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{(2n-\ln n)}$. Keďže je majorantný a konverguje (ide o geometrický rad s kvocientom $\frac{2}{3}$), tak podľa porovnávacieho kritéria je aj rad $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{(2n-\ln n)}$ konvergentný.

14. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log_2\left(\frac{n+3}{n+1}\right)$.

Riešenie:

Použijeme Leibnizovo kritérium pre rady so striedavými znamienkami. Označme $a_n = \log_2\left(\frac{n+3}{n+1}\right)$. Ukážeme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca postupnosť kladných čísel s $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = \log_2\left(\frac{n+3}{n+1}\right) = \log_2\left(1+\frac{2}{n+1}\right) > \log_2 1 = 0$. Ďalej $a_{n+1} = \log_2\left(1+\frac{2}{n+2}\right)$.
Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+2} &< \frac{1}{n+1}\\
\frac{2}{n+2} &< \frac{2}{n+1}\\
1+\frac{2}{n+2} &< 1+\frac{2}{n+1}\\
\log_2\left(1+\frac{2}{n+2}\right) &< \log_2\left(1+\frac{2}{n+1}\right)\\
a_{n+1} &< a_n
\end{aligned}$$

Takže postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca postupnosť kladných čísel. Navyše:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \log_2\left(1+\frac{2}{n+1}\right) = \log_2 1 = 0.$$

Podľa Leibnizovo kritéria pre rady so striedavými znamienkami sme ukázali, že rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log_2\left(\frac{n+3}{n+1}\right)$ je konvergentný.

15. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

Riešenie:

Použijeme Leibnizovo kritérium pre rady so striedavými znamienkami. Označme $a_n = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{n+1}\right)$. Ukážeme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca postupnosť kladných čísel s $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) > \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$.

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 &> n^2+2n = n(n+2) \\
\log_{\frac{1}{2}}(n+1)^2 &< \log_{\frac{1}{2}}(n(n+2)) \\
2\log_{\frac{1}{2}}(n+1) &< \log_{\frac{1}{2}}(n) + \log_{\frac{1}{2}}(n+2) \\
\log_{\frac{1}{2}}(n+1) - \log_{\frac{1}{2}}(n+2) &< \log_{\frac{1}{2}}(n) - \log_{\frac{1}{2}}(n+1) \\
\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right) &< \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{n+1}\right) \\
a_{n+1} &< a_n
\end{aligned}$$

Takže postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca postupnosť kladných čísel. Navyše:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0.$$

Podľa Leibnizovo kritéria pre rady so striedavými znamienkami sme ukázali, že rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{n+1}\right)$ je konvergentný.

16. Nájdite súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log_2\left(\frac{n+3}{n+1}\right)$.

Riešenie:

V 14.príklade sme zistili, že rad konverguje. Pokúsime sa teraz nájsť jeho súčet ako limitu postupnosti čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\begin{aligned}
s_1 &= -\log_2\left(\frac{4}{2}\right) = -\log_2 4 + \log_2 2 \\
s_2 &= -\log_2\left(\frac{4}{2}\right) + \log_2\left(\frac{5}{3}\right) = -\log_2 4 + \log_2 2 + \log_2 5 - \log_2 3 \\
s_3 &= -\log_2 4 + \log_2 2 + \log_2 5 - \log_2 3 - \log_2 6 + \log_2 4 \\
s_4 &= \log_2 2 + \log_2 5 - \log_2 3 - \log_2 6 + \log_2 7 - \log_2 5 \\
s_5 &= 1 - \log_2 3 + \log_2 7 - \log_2 8 \\
&\vdots \\
s_n &= 1 - \log_2 3 + (-1)^{n+1}\log_2(n+2) + (-1)^n \log_2(n+3) \\
&= 1 - \log_2 3 + (-1)^n \log_2\left(\frac{n+3}{n+2}\right) \qquad (20)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 - \log_2 3 + \lim_{n\to\infty}(-1)^n \log_2\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \log_2 3 \qquad (21)$$

Z (21) vyplýva, že súčet radu je $1 - \log_2 3$.