1. (a) Vyjadrite v algebraickom tvare i^{3547}.
   (b) Pre ktoré komplexné čísla $z = x + iy$ platí $z^2 = \overline{z}$?
   (c) Vypočítajte $\left(\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{24}$. Výsledok vyjadrite v algebraickom tvare.
   (d) V obore komplexných čísel riešte rovnicu $z^6 = -64$. Riešenie zapíšte v algebraickom tvare.
   (e) V obore komplexných čísel riešte rovnicu $z^2 - \sqrt{2}(1+i)z + 1 + (1-\sqrt{3})i = 0$.

Riešenie:

(a) $i^{3547} = i^{4.886+3} = (i^4)^{886}\, i^3 = 1^{886}(-i) = -i$.

(b) $z^2 = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + 2xyi$ má byť rovné $\overline{z} = x - iy$. Dve komplexné čísla sa rovnajú, ak sa rovnajú ich reálne časti ale aj ich imaginárne časti. Z toho vyplýva:

$$x^2 - y^2 = x \qquad (1)$$

$$2xy = -y \qquad (2)$$

Z (2) máme $y = 0$ alebo pre $y \neq 0$ máme $x = -\frac{1}{2}$.
Ak $y = 0$, potom z (1) dostávame $x^2 = x$, čo je splnené pre $x = 0$ alebo pre $x = 1$.
Ak $x = -\frac{1}{2}$, potom (1) dostávame $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$, čo je splnené pre $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ alebo pre $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Celkovo sme teda dostali štyri komplexné čísla, ktoré spĺňajú $z^2 = \overline{z}$. Sú to: 0, 1, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(c) Najprv prepíšeme komplexné čísla vystupujúce v zlomku do exponenciálneho tvaru: $1-i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{7}{4}\pi}$, $1+\sqrt{3}i = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$. Potom podiel $\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{7}{4}\pi}}{2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i\frac{17}{12}\pi}$. Čiže:

$\left(\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{24} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{i\frac{17}{12}\pi}\right)^{24} = \frac{1}{2^{12}}\mathrm{e}^{i\left(24\frac{17}{12}\pi\right)} = 2^{-12}\mathrm{e}^{i34\pi} = 2^{-12}\left(\cos 34\pi + i\sin 34\pi\right) = 2^{-12}\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = 2^{-12}$.

(d) Vyjadrime najprv komplexné číslo vystupujúce na pravej strane rovnice v exponenciálnom tvare, tj. $-64 = -64 + 0i = 64\mathrm{e}^{i(\pi+2k\pi)}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Potom riešenia rovnice $z^6 = -64$ vyjadrené v exponenciálnom tvare sú:

$$z_k = \sqrt[6]{64}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right)},$$

kde $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Vyjadrime ich v algebraickom tvare:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[6]{64}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt[6]{2^6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i \\
z_1 &= 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i \\
z_2 &= 2\mathrm{e}^{i\frac{5}{6}\pi} = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} + i \\
z_3 &= 2\mathrm{e}^{i\frac{7}{6}\pi} = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} - i \\
z_4 &= 2\mathrm{e}^{i\frac{3}{2}\pi} = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = -2i \\
z_5 &= 2\mathrm{e}^{i\frac{11}{6}\pi} = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right) = \sqrt{3} - i
\end{aligned}$$

(e) Rovnicu najprv upravme:

$0 = z^2 - \sqrt{2}(1+i)z + 1 + (1-\sqrt{3})i = z^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}(1+i)z + \left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 + (1-\sqrt{3})i = \left(z - \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{(1+i)^2}{2}\right) + 1 + i - \sqrt{3}i = \left(z - \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{2i}{2}\right) + 1 + i - \sqrt{3}i = \left(z - \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \sqrt{3}i.$

Označme $w := z - \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$, potom z predchádzajúceho dostaneme: $w^2 = -1 + \sqrt{3}i$. Táto rovnica má dve riešenia:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\
w_1 &= \sqrt{2}e^{i\frac{4}{3}\pi} = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Keďže $w = z - \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$ a teda $z = w + \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$, tak riešenia rovnice $z^2 - \sqrt{2}(1+i)z + 1 + (1-\sqrt{3})i = 0$ sú nasledujúce:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2} + i\frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}, \\
z_1 &= i\frac{(1-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

2. (a) Gaussovou eliminačnou metódou nájdite riešenie $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ sústavy:

$$
\begin{aligned}
3x - 2y + z &= 1 \\
-x + y - z &= -2 \\
-2x - 2y + 4z &= 3
\end{aligned}
\tag{3}
$$

(b) Označme A maticu sústavy (3) a $\vec{b}$ vektor pravých strán rovníc sústavy (3). Ukážte, že hodnosť matice A sústavy (3) sa rovná hodnosti rozšírenej matici $(A\ \vec{b}\ )$ sústavy (3).

(c) Ukážte, že štvorica vektorov $\{(3,-1,-2), (-2,1,-2), (1,-1,4), (1,-2,3)\}$ je linerne závislá.

(d) Pomocou determinantov nájdite A^{-1}, tj. inverznú maticu k matici A.

(e) Ukážte, že $\vec{q} = A^{-1}\vec{b}$.

(f) Nech $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Určte hodnosť matice B výpočtom jej determinantu. Pri výpočte determinantu použite rozvoj cez druhý stĺpec.

(g) Vyšetrite lineárnu závislosť, lineárnu nezávislosť trojice $\{(2,0,-1), (1,0,1), (0,3,-1)\}$.

(h) Pomocou elementárnych riadkových operácií nájdite B^{-1}.

(i) Vypočítajte $P = B^{-1}A$.

(j) Cramerovým pravidlom nájdite riešenie $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$ sústavy $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b}$.

(k) Ukážte, že $\vec{r} = P\vec{q}$.

(l) Ukážte, že ľubovoľný vektor (u, v, w) z $\mathbb{R}^3$ možno napísať ako lineárnu kombináciu vektorov $(3, -1, -2), (-2, 1, -2), (1, -1, 4)$, tj. $(u, v, w) = \overline{x}(3, -1, -2) + \overline{y}(-2, 1, -2) + \overline{z}(1, -1, 4)$, resp. vektorov $(2, 1, 0), (0, 0, 3), (-1, 1, -1)$, tj. $(u, v, w) = \tilde{x}(2, 1, 0) + \tilde{y}(0, 0, 3) + \tilde{z}(-1, 1, -1)$.

(m) Ukážte, že $P \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$.

Riešenie:

(a) Sústavu (3) prepíšeme do rozšírenej matice sústavy $(A \mid \vec{b}\ )$ a elemtárnymi riadkovými operáciami upravíme na stupňovitú maticu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right) \underset{R_1 :=: R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 := R_2 + 3R_1 \\ R_3 := R_3 - 2R_1}}{\sim}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -4 & 6 & 7 \end{array}\right) \underset{R_3 := R_3 + 4R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -13 \end{array}\right)$$

Odtiaľ $z = \frac{13}{2}$, $y = 8$, $x = \frac{7}{2}$. Teda hľadané riešenie sústavy (3) je $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)^T = \left(\frac{7}{2}, \frac{16}{2}, \frac{13}{2}\right)^T$.

(b) Z úprav rozšírenej matice sústavy urobených v časti (a) príkladu vyplýva, že $h(A\ \vec{b}\ ) = 3$ (počet nenulových riadkov v stupňovitej matici), ale aj, že $h(A) = 3$. A teda $h(A\ \vec{b}\ ) = h(A)$.

(c) Pretože štvorica $\{(3, -1, -2), (-2, 1, -2), (1, -1, 4), (1, -2, 3)\}$ tvorí stĺpce rozšírenej matice sústavy $(A\ \vec{b}\ )$, ktorej hodnosť je 3, tak štvorica je lineárne závislá. Uvedené vyplýva aj z toho, že sme našli riešenie $\vec{q} = \left(\frac{7}{2}, \frac{16}{2}, \frac{13}{2}\right)^T$ sústavy (3) a teda platí:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 8 \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Čo je to isté ako:

$$\frac{7}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{13}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Teda vektor $(1, -2, 3)$ je lineárnou kombináciou vektorov $(3, -1, -2), (-2, 1, -2), (1, -1, 4)$ a preto je táto štvorica vektorov lineárne závislá.

(d) Pretože A je štvorcová matica typu 3×3 a platí, že $h(A) = 3$, teda A má plnú hodnosť, tak k nej existuje inverzná matica A^{-1}. Vypočítajme najprv deteminant matice A:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (12 + 2 - 4) - (-2 + 6 + 8) = -2.$$

Označme adj A maticu adjungovanú k matici A a $\tilde{a}_{ij}$ algebraický doplnok k prvku a_{ij}, potom:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \mathrm{adj} A = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}.$$

Teda:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 14 & 2 \\ 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) $A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -\frac{1}{2} \\ -3 & -7 & -1 \\ -2 & -5 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 8 \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} = \vec{q}.$

(f) $det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$
$0 + 0 - 3(2+1) = -9 \neq 0.$

Determinant štvorcovej matice B je rôzny od nuly a teda matica B je regulárna, čiže má plnú hodnosť, rovnú 3.

(g) V trojici $\{(2,0,-1),(1,0,1),(0,3,-1)\}$ vystupujú riadky matice B, ktorá má hodnosť 3, čiže má tri lineárne nezávislé stĺpce. Vzhľadom na to, že $h(B^T) = h(B)$, má matica B aj tri lineárne nezávislé riadky a teda to musí byť lineárne nezávislá trojica.

(h) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_1 :=: R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 := R_2 - 2R_1}{\sim}$
$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 :=: R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 := \frac{1}{3}R_2 \\ R_3 := -\frac{1}{3}R_3}}{\sim}$
$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 := R_2 + \frac{1}{3}R_3 \\ R_1 := R_1 - R_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$

Z toho máme: $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$

(i) $P = B^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{11}{9} & -\frac{2}{9} & 1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix}$

(j) Determinant matice B sme už vypočítali v časti (f) príkladu. Riešenie sústavy $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b}$ potom bude:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{det(B)} = \frac{-3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{1}{3}(1-2) = -\frac{1}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{det(B)} = \frac{(4-3+0)-(0+6-1)}{-9} = \frac{-4}{-9} = \frac{4}{9}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{det(B)} = \frac{-3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{1}{3}(-4-1) = -\frac{5}{3}$$

Teda hľadané riešenie je $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)^T = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{5}{3}\right)^T$.

(k) $P\vec{q} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{11}{9} & -\frac{2}{9} & 1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 8 \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{9} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = \vec{r}.$

Uvedené možno ľahko ukázať aj bez výpočtu. Pretože $\vec{q} = A^{-1}\vec{b}$, $\vec{r} = B^{-1}\vec{b}$ a $P = B^{-1}A$, tak $P\vec{q} = PA^{-1}\vec{b} = B^{-1}AA^{-1}\vec{b} = B^{-1}\vec{b} = \vec{r}$.

(l) Zapísať (u, v, w) ako lineárnu kombináciu vektorov $(3, -1, -2), (-2, 1, -2), (1, -1, 4)$, znamená riešiť sústavu rovníc:

$$x\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

pre neznáme x, y, z. Čiže $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$. Riešenie tejto sústavy označme ako $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$. Potom: $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u - 3v - \frac{w}{2} \\ -3u - 7v - w \\ -2u - 5v - \frac{w}{2} \end{pmatrix}$.

Podobne $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(u+v) \\ \frac{1}{9}(-u+2v+3w) \\ \frac{1}{3}(-u+2v) \end{pmatrix}$.

(m) Pretože $P = B^{-1}A$, tak $P\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = PA^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = B^{-1}AA^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$.

3. (a) Nech je daná matica A reálnych čísel rozmerov $n \times n$ a nech λ je komplexné číslo také, že existuje vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$ rozmerov $n \times 1$ spĺňajúci rovnosť $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Ukážte, že, aby taký vektor existoval, musí byť splnené $det(A - \lambda I) = 0$, kde I je jednotková matica.

   (b) Nájdite príslušné λ pre maticu $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   (c) Nájdené riešenia z časti (b) príkladu označme λ_1, resp. λ_2. Pre obe riešenia časti (b) príkladu nájdite príslušné $\vec{u}_1$, resp. $\vec{u}_2$ spĺňajúce $A\vec{u}_1 = \lambda_1\vec{u}_1$, resp. $A\vec{u}_2 = \lambda_2\vec{u}_2$.

   (d) Označme $U = (\vec{u}_1\ \vec{u}_2)$ a $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Ukážte, že $A = U\Lambda U^{-1}$.

Riešenie:

(a) Prepíšme rovnosť $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ na tvar $(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{0}$, čo je pre dané λ homogénna sústava n rovníc o n neznámych. Sústava má určite aspoň jedno riešenie, konkrétne nulové riešenie. Požiadavka $\vec{u} \neq \vec{0}$ na riešenia ale znamená, že sústava musí mať nekonečne veľa (aj nenulových) riešení. Čiže matica sústavy $(A - \lambda I)$ musí byť singulárna. To je pravda práve vtedy, keď jej determinant je nulový. Príslušné λ teda vyhovuje rovnici $det(A - \lambda I) = 0$.

(b) Riešme rovnicu $det(A - \lambda I) = 0$, teda:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Po úprave $\lambda^2 - 1 = 0$. Rovnica má dve riešenia $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1$.

(c) Vyriešme sústavu $A\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{u}_1$ najprv pre $\lambda_1 = 1$. Matica sústavy $A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Hľadané riešenie je teda $\vec{u}_1 = s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, kde $s \neq 0$ je ľubovoľné reálne číslo. Označme $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, potom $\vec{u}_1 = s\vec{v}_1$.

Teraz riešme sústavu $A\vec{u}_2 = \lambda_2 \vec{u}_2$ pre $\lambda_2 = -1$. Matica sústavy $A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Hľadané riešenie je teda $\vec{u}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, kde $t \neq 0$ je ľubovoľné reálne číslo. Označme $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, potom $\vec{u}_2 = t\vec{v}_2$.

(d) Stĺpce matice U tvoria riešenia $\vec{u}_1$, resp. $\vec{u}_2$ rovníc $A\vec{u}_1 = \lambda_1\vec{u}_1$, resp. $A\vec{u}_2 = \lambda_2\vec{u}_2$ nájdených v časti (c) príkladu. Pre ľubovoľné nenulové $s \in \mathbb{R}$, resp. $t \in \mathbb{R}$ také, že $\vec{u}_1 = s\vec{v}_1$ a $\vec{u}_2 = t\vec{v}_2$ sú vektory $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$ lineárne nezávislé. K matici U teda existuje inverzná matica U^{-1}. Prenásobme maticu U maticou Λ sprava, dostaneme:

$$U\Lambda = (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = (\lambda_1\vec{u}_1 \ \lambda_2\vec{u}_2) = (A\vec{u}_1 \ A\vec{u}_2) = A\,(\vec{u}_1 \ \vec{u}_2) = AU.$$

Potom $U\Lambda U^{-1} = AUU^{-1} = AI = A$.

4. Danú racionálnu funkciu napíšte v tvare súčtu polynómu a elementárnych zlomkov nad $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{3x^8 + 8x^7 - 9x^6 - 39x^5 + 30x^4 + 68x^3 - 63x^2 + 27x + 35}{x^6 + 3x^5 - 2x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 17x - 10}.$$

Riešenie: Označme:

$$\begin{aligned} p(x) &:= 3x^8 + 8x^7 - 9x^6 - 39x^5 + 30x^4 + 68x^3 - 63x^2 + 27x + 35 \\ q(x) &:= x^6 + 3x^5 - 2x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 17x - 10 \end{aligned}$$

Vydeľme polynómy p a q, dostaneme:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 3x^2 - x + \frac{-5x^5 + 9x^4 + 20x^3 - 16x^2 + 17x + 35}{x^6 + 3x^5 - 2x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 17x - 10}$$

Označme ďalej:

$$r(x) := -5x^5 + 9x^4 + 20x^3 - 16x^2 + 17x + 35$$

Potom:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 3x^2 - x + \frac{r(x)}{q(x)},$$

kde $\frac{r(x)}{q(x)}$ je rýdzo racionálna funkcia. Túto funkciu je možné napísať ako súčet elementárnych zlomkov, najprv však treba urobiť kánonický rozklad polynómu v menovateli, teda $q(x)$, nad $\mathbb{R}$. Pretože ide o polynóm s celočíselnými koeficientami, môžeme sa pokúsiť nájsť nejaké jeho racionálne korene $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Ak $c = \frac{p}{q}$ je koreň polynómu $q(x)$, tak určite $p/(-10)$ a $q/1$. Všetci kandidáti na racionálny koreň polynómu $q(x)$ sú teda z množiny $\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$. Pri určovaní koreňov si môžeme pomôcť Hornerovou schémou:

	1	3	-2	-12	3	17	-10
1		1	4	2	-10	-7	10
	1	4	2	-10	-7	10	
1		1	5	7	-3	-10	
	1	5	7	-3	-10		
1		1	6	13	10		
	1	6	13	10			
-2		-2	-8	-10			
	1	4	5				

Teda máme:

$$q(x) = (x-1)^3(x+2)(x^2+4x+5) \tag{4}$$

Rozklad (4) je kánonický rozklad polynómu $q(x)$ nad $\mathbb{R}$, pretože polynóm x^2+4x+5 má dva komplexne združené korene $-2 \pm i$.

S využitím (4) urobme rozklad na súčet elementárnych zlomkov:

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+2} + \frac{Ex+F}{x^2+4x+5}$$

Hodnoty koeficientov A, B, C, D, E, F nájdeme z rovnosti:

$$\begin{aligned} r(x) \;=\; & A(x+2)(x^2+4x+5) + B(x-1)(x+2)(x^2+4x+5) + \\ & + C(x-1)^2(x+2)(x^2+4x+5) + D(x-1)^3(x^2+4x+5) + \\ & + (Ex+F)(x-1)^3(x+2) \end{aligned}$$

Porovnaním polynómov na oboch stranách rovnice, získame sústavu šiestich lineárnych rovníc o šiestich neznámych:

$$\begin{aligned} -5 &= C + D + E \\ 9 &= B + 4C + D - E + F \\ 20 &= A + 5B + 2C - 4D - 3E - F \\ -16 &= 6A + 7B - 10C - 4D + 5E - 3F \\ 17 &= 13A - 3B - 7C + 11D - 2E + 5F \\ 35 &= 10A - 10B + 10C - 5D - 2F \end{aligned}$$

Sústava má jediné riešenie: $A = 2$, $B = 0$, $C = 1$, $D = -3$, $E = -3$, $F = 5$.

Takže $\frac{r(x)}{q(x)}$ môžeme napísať nasledujúcim spôsobom:

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x+2} - \frac{3x-5}{x^2+4x+5}$$

Celkovo máme:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = 3x^2 - x + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x+2} - \frac{3x-5}{x^2+4x+5}$$