

Domáce úlohy cvičenie 5 - riešenia

DÚ 1: Nájdite definičný obor a zistite, či je párna alebo nepárna funkcia $f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x+4}\right)$.

Riešenie:

Pri určovaní definičného oboru musí byť v tomto prípade zabezpečené, aby sa nedelilo nulou a súčasne, aby argument logaritmu bol kladným číslom, pretože logaritmické funkcie sú definované len na množine kladných reálnych čísel. Musí teda súčasne platiť:

$$x + 4 \neq 0, \quad \frac{4-x}{x+4} > 0.$$

Z podmienky $x + 4 \neq 0$ máme $x \neq -4$. Druhá podmienka, tj. $\frac{4-x}{x+4} > 0$, je splnená, ak:

$$(4 - x > 0 \text{ a súčasne } x + 4 > 0) \text{ alebo } (4 - x < 0 \text{ a súčasne } x + 4 < 0).$$

kde ostrú nerovnosť $x + 4 > 0$, resp. $x + 4 < 0$ zabezpečuje práve prvá podmienka, tj. $x \neq -4$. Ak má súčasne platiť $4 - x > 0$ aj $x + 4 > 0$, tak musí byť: $x < 4$ a súčasne $x > -4$. Tomu pre x vyhovuje interval $(-4, 4)$.

Ak má súčasne platiť $4 - x < 0$ aj $x + 4 < 0$, tak musí byť: $x > 4$ a súčasne $x < -4$. To však súčasne nastať nemôže.

Preto musí byť $x \in (-4, 4)$ a teda $D(f) = (-4, 4)$.

Aby mohla byť funkcia párna alebo nepárna, je potrebné, aby definičný obor funkcie bol súmerný podľa počiatku, pretože definícia párnej (nepárnej) funkcie vyžaduje splnenie dvoch podmienok:

1. pre každé $x \in D(f)$ platí: $-x \in D(f)$
2. pre každé $x \in D(f)$ platí: $f(-x) = f(x)$ - pre párnú funkciu
 $f(-x) = -f(x)$ - pre nepárnú funkciu

Prvá podmienka znamená súmernosť definičného oboru funkcie podľa počiatku. To je pre funkciu f splnené, pretože $D(f) = (-4, 4)$. Skutočne, ak zoberieme $x \in D(f)$ také, že $-4 < x \leq 0$, tak po prenásovení (-1) dostaneme: $4 > -x \geq 0$ a teda $-x \in D(f)$. Ak vezmeme $x \in D(f)$ také, že $0 < x < 4$, po prenásovení (-1) dostaneme: $0 > -x > -4$ a teda opäť $-x \in D(f)$. Vyšetrite teraz, či ide o párnú alebo nepárnú funkciu. Uvažujme ľubovoľné $x \in D(f)$, potom:

$$f(-x) = \ln\left(\frac{4 - (-x)}{-x + 4}\right) = \ln\left(\frac{x + 4}{4 - x}\right) = \ln\left(\frac{4 - x}{x + 4}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{4 - x}{x + 4}\right) = -f(x)$$

Funkcia f je teda **nepárna**. Nie je párna, pretože existuje $x \in D(f)$ také, že $f(-x) \neq f(x)$, napr. $x = -2$. $f(-2) = \ln\left(\frac{6}{2}\right) = \ln 3$, kým $f(2) = \ln\left(\frac{2}{6}\right) = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3 \neq \ln 3 = f(-2)$.

Iný postup:

Predtým, než začneme vyšetrovať párnosť, nepárnosť funkcie, môžeme upraviť predpis funkcie (vychádzame pritom z vlastností logaritmov):

$$f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x+4}\right) = \ln(4-x) - \ln(x+4)$$

Z predchádzajúcich úvah vieme, že $D(f) = (-4, 4)$ je súmerný podľa počiatku. Vyšetrite, či ide o párnú alebo nepárnú funkciu. Uvažujme ľubovoľné $x \in D(f)$, potom:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(4 - (-x)) - \ln(-x + 4) = \ln(x + 4) - \ln(4 - x) \\ &= -(\ln(4 - x) - \ln(x + 4)) = -f(x) \end{aligned}$$

Funkcia f je **nepárna**. Nie je párna (viď. príklad s $x = -2$ uvedený vyššie).

DÚ 2: Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$. Upravte predpis funkcie na tvar $f(x) = a + \frac{b}{x+3}$, kde $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. S využitím tejto úpravy ukážte, že funkcia je injektívna na svojom definičnom obore.

Riešenie:

Definičný obor funkcie f musí obsahovať všetky reálne čísla x také, že $x \neq -3$, inak by došlo k deleniu nulou. Preto $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$.

Upravme predpis funkcie:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3} = 2 \frac{x-\frac{1}{2}}{x+3} = 2 \frac{x+3-3-\frac{1}{2}}{x+3} = 2 \frac{x+3-\frac{7}{2}}{x+3} = 2 \left(1 - \frac{\frac{7}{2}}{x+3} \right) = 2 - \frac{7}{x+3}$$

Pri úprave predpisu sme mohli rovno polynómy $2x - 1$ a $x + 3$ vydeliť. Môžeme tak urobiť priamo alebo prostredníctvom Hornerovej schémy:

$$\begin{array}{r} 2 \quad -1 \\ -3 \quad -6 \\ \hline 2 \quad -7 \end{array}$$

Teda delením $2x - 1$ s $x + 3$ dostaneme polynóm 2 a zvyšok -7 . Inými slovami:

$$\frac{2x-1}{x+3} = 2 - \frac{7}{x+3}$$

Aby bola funkcia injektívna na svojom definičnom obore musí pre každé $x_1, x_2 \in D(f)$ platiť: ak $x_1 \neq x_2$, tak $f(x_1) \neq f(x_2)$. Dokážeme obmenu tohto tvrdenia, teda pre každé $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: ak $f(x_1) = f(x_2)$, tak $x_1 = x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 2 - \frac{7}{x_1+3} &= 2 - \frac{7}{x_2+3} \\ \frac{7}{x_1+3} &= \frac{7}{x_2+3} \\ \frac{1}{x_1+3} &= \frac{1}{x_2+3} \\ x_1+3 &= x_2+3 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Funkcia f je teda injektívna (prostá).