

Domáca úloha cvičenie 2 - riešenie

DÚ: Riešte sústavu lineárnych rovníc GEM:

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 2$$

$$-x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -1$$

$$3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 12x_4 = 7$$

V prípade, že sústava má nekonečne veľa riešení, vyjadrite riešenie pomocou parametra(ov). Urobte skúšku správnosti.

Riešenie:

Upravme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitú maticu:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & -8 & -1 \\ 3 & 9 & -2 & 12 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\sim} R_2 := R_2 + R_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 9 & -2 & 12 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\sim} R_3 := R_3 - 3R_1$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\sim} R_3 := R_3 - R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sústava má nekonečne veľa riešení. Riešením sú všetky body (x_1, x_2, x_3, x_4) z $\mathbb{R}^4$, ktoré vyhovujú rovniciam:

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 2$$

$$x_3 - 3x_4 = 1$$

Za parametre zvolíme premenné x_2 a x_4 , tj. $x_2 = u \in \mathbb{R}$ a $x_4 = v \in \mathbb{R}$. Potom z druhej rovnice dostaneme:

$$x_3 = 1 + 3v.$$

Dosadením za x_2 , x_3 , resp. x_4 do prvej rovnice získame:

$$x_1 = 3 - 3u - 2v.$$

Riešením sústavy teda je $P = \{(3 - 3u - 2v, u, 1 + 3v, v); u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$.

Skúška správnosti:

$$\begin{aligned} 3 - 3u - 2v + 3u - (1 + 3v) + 5v &= 3 - 3u - 2v + 3u - 1 - 3v + 5v = 2, \\ -(3 - 3u - 2v) - 3u + 2(1 + 3v) - 8v &= -3 + 3u + 2v - 3u + 2 + 6v - 8v = -1, \\ 3(3 - 3u - 2v) + 9u - 2(1 + 3v) + 12v &= 9 - 9u - 6v + 9u - 2 - 6v + 12v = 7. \end{aligned}$$