1. KOMPLEXNÉ ČÍSLA

1. Nájdite výsledok operácie v tvare $x+yi$, kde $x, y \in R$.
   a. $3 + 7i - (5 - 2i)(4 - i)$
   b. $i(1 + i)(1 - i)(1 + 2i)(1 - 2i)$
   c. $\frac{(1-7i)}{(2+3i)}$
   d. $\frac{a+bi}{a-bi}$, $a, b \in R$
   e. $\frac{i(2+3i)}{3+5i}$
2. Nájdite $x, y \in R$ také, e
   a. $(2x + 3y) + i(x - y) = -1 + 2i$
   b. $(ix + y)(2x - 3iy) = 2i$
   c. $\dfrac{-y + ix}{1 - 2i} + \dfrac{x + iy}{2 + 3i} = 1$
3. Dané komplexné číslo znázornite a nájdite jeho goniometrický tvar.
   a. -5
   b. $1 - i$
   c. $\sqrt{3} - i$
   d. $-5i$
   e. $-2 - 2i$
   f. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
4. Vypočítajte $zu, \frac{z}{u}, z^n$.
   a. $z = \sqrt{3}(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5})$, $u = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, $n = 5$
   b. $z = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, $u = 6(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8})$, $n = 2004$
5. V obore komplexných čísel riešte rovnicu.
   a. $z^4 = 4$
   b. $z^4 = -4$
   c. $z^3 = -8i$
   d. $z^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$
   e. $z^2 = 2i$
   f. $z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. Vypočítajte.
   a. i^{101}, i^{-39}
   b. $(1 + i)^4$
   c. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8$
   d. $(\sqrt{3} - i)^3$
   e. $(-1 - \sqrt{3}i)^6$

Výsledky

1. a) $-15 + 20i$, b) $10i$, c) $-\frac{19}{13} - \frac{17}{13}i$, d) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i$, e) $\frac{1}{34} + \frac{21}{34}i$
2. a) $x = 1$, $y = -1$, b) $x = \pm 1$, $y = 0$, c) $x = -4$, $y = \frac{1}{2}$
3. a) $5(\cos\pi + i\sin\pi)$, b) $\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi)$,
   c) $2(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi)$, d) $5(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi)$,
   e) $2\sqrt{2}(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\ )$
   f) $\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi$
4. a) $2\sqrt{3}(\cos\frac{26}{15}\pi + i\sin\frac{26}{15}\pi)$, $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\frac{16}{15}\pi + i\sin\frac{16}{15}\pi)$, $-9\sqrt{3}$
   b) $18\left(\cos\frac{5}{8}\pi + i\sin\frac{5}{8}\pi\right)$, $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{8}\pi - i\sin\frac{1}{8}\pi\right)$, -3^{2004}
5. a) $z_k = \sqrt{2}\left(\cos k\frac{\pi}{2} + i\sin k\frac{\pi}{2}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.
   b) $z_k = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.
   c) $z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, $k = 0, 1, 2$.
   d) $z_0 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$.
   e) $z_0 = 1 + i$, $z_1 = -1 - i$.
   f) $z_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}i\right)$, $z_1 = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}i\right)$.
6. a) i, b) -4, c) 1, d) $8i$, e) 64.

2. POLYNÓMY

1. Určte stupeň polynómu $f(x)$
   a. $f(x) = 1 + x + ix$
   b. $f(x) = 3x + 2 - 5x^3$
   c. $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots x^n$, $n \in N$.
2. Vynásobte a nájdite stupeň súčinu $f(x) \cdot g(x)$
   a. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^3 - 1$
   b. $f(x) = x^3 + x + 1$, $g(x) = (x - i)$
3. Del'te (určte podiel a zvyšok).
   a. $(x^4 + 1) : (x - 1)$,
   b. $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1)$
   c. $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x^2 + 1)$
4. Daný polynóm rozložte na súčin mocnín ireducibilných polynómov nad R a nad C.
   a. $2x^2 - x - 1$
   b. $2x^2 - x + 1$
   c. $3x^3 - x^2 + 3x - 1$
   d. $x^4 + 4$
   e. $2x^3 - x - 1$
   f. $2x^4 - x^3 + 7x^2 - 4x - 4$
   g. $4x^5 - 4x^4 - 19x^3 - 13x^2 - 5x - 3$
5. Pomocou Hornerovej schémy vypočítajte hodnotu $f(c)$, ak
   a. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $c = 4$
   b. $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 4x + 2$, $c = -\frac{1}{3}$
   c. $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$, $c = -2 - i$
6. Nájdite takú hodnotu parametra a, že c bude koreňom polynómu $f(x)$.
   a. $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + 2$, $c = 3$
   b. $f(x) = 2x^6 - ax^4 - x^3 + ax^2 + 3a$, $c = -1$
7. Nájdite násobnosť koreňa c polynómu $f(x)$.
   a. $f(x) = x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x + 8$, $c = 2$
   b. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $c = 2$
   c. $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$, $c = -2$
   d. $f(x) = x^6 - 2ix^5 - x^4 - x^2 + 2ix + 1$, $c = i$
8. Nájdite všetky racionálne korene polynómu
   a. $2x^7 - 13x^6 + 6x^5 + 13x^4 - 18x^3 + 29x^2 - 22x + 3$
   b. $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4$

c. $9x^4 - 21x^3 + x^2 + 9x + 2$
d. $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$

9. Nájdite všetky korene polynómu.
a. $x^4 - 30x^2 + 289$
b. $x^3 + i$
c. $x^8 - 16$

Výsledky

1. a) 1, b) 3, c) n
2. a) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$, 5, b) $x^4 - ix^3 + x^2 + (1-i)x - i$, 4
3. a) $(x^4 + 1) = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + 2$, (zv. 2)
b) $(x^3 + x^2 + x + 1) = (x+1)(x^2+1)$, (zv. 0),
c) $(x^3 + x^2 + x + 1) = (x^2+1)(x+1)$, (zv. 0)
4. Nad R:
a) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})$, b) $2x^2-x+1$, c) $(x^2+1)(3x-1)$,
d) $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$, e) $(2x^2+2x+1)(x-1)$,
f) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})(x^2+4)$, g) $4(x+1)^2(x-3)(x^2+\frac{1}{4})$
nad C:
a) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})$, b) $2(x - \frac{1+i\sqrt{7}}{4})(x - \frac{1-i\sqrt{7}}{4})$,
c) $(x+i)(x-i)(3x-1)$,
d) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$,
e) $2(x-1)(x+\frac{1+i}{2})(x+\frac{1-i}{2})$,
f) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})(x+2i)(x-2i)$,
f) $4(x+1)^2(x-3)(x+\frac{1}{2}i)(x-\frac{1}{2}i)$
5. a) 136, b) 1, c) $-1-44i$
6. a) $\frac{47}{3}$, b) -1
7. a) 2, b) 3, c) 4, d) 3,
8. a) $1, 1, -\frac{3}{2}$, b) $-\frac{2}{3}, 2$, c) $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 2$,
d) $-1, -1, -1, -1, 3$
9. a) $\pm 4 \pm i$, b) $i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, c) $\pm\sqrt{2}$, $\pm i\sqrt{2}$, $\pm 1 \pm i$

3. RACIONÁLNE FUNKCIE

1. Napíšte, či je daná funkcia elementárnym zlomkom nad R.
a. $\dfrac{2x+1}{x^2+5x+6}$
b. $\dfrac{2x+1}{(x^2+4x+5)^n}$, $n \in N$
c. $\dfrac{2x+1}{(x-2)^2}$ d. $\dfrac{1}{(x-2)^2}$

2. Rozložte rýdzo racionálnu funkciu na elementárne zlomky nad R, nad C.
a. $\dfrac{x^2-6x+3}{(x+1)(x^2+9)}$ b. $\dfrac{2x^2-9x+5}{(x-2)(x^2+x-6)}$
c. $\dfrac{x^2}{(x-3)^3}$ d. $\dfrac{2x+3}{x^2+2x+2}$

3. Danú racionálnu funkciu napíšte v tvare súčtu polynómu a elementárnych zlomkov nad R aj nad C.
a. $\dfrac{x^4+2x^3+4x^2+2x+1}{x^3+x^2-2}$
b. $\dfrac{x^2+2x}{x^3+3x^2+3x+1}$
c. $\dfrac{x^2-6x+7}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}$
d. $\dfrac{3x^3-12x^2+12x-1}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}$
e. $\dfrac{2x^3+7x^2+14x+8}{(x^2+2x+2)^2}$
f. $\dfrac{x^4+4x^3+9x^2+5x+4}{(x-3)(x^2+2x+2)^2}$

4. Napíšte tvar rozkladu danej racionálnej funkcie na súčet elementárnych zlomkov nad R, nad C.
a. $\dfrac{f(x)}{(2x+1)^3(x-1)^2(2x^2-2x+1)}$, $\operatorname{st} f(x) = 6$
b. $\dfrac{x}{(x^2+1)^3(x^2-1)^3}$

Výsledky

1. a) $D = 5^2 - 4\cdot 6 = 1 > 0 \implies$ nie je,
b) $D = -4 < 0$, $\operatorname{st}(2x+1) = 1 \implies$ áno, c) nie je,
d) áno
2. a) $\frac{1}{x+1} - \frac{6}{x^2+9}$ – nad R, $\frac{1}{x+1} + \frac{i}{x-3i} - \frac{i}{x+3i}$ – nad C
b) $\frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x-2)^2}$ – nad R, nad C,
c) $\frac{1}{x-3} + \frac{6}{(x-3)^2} + \frac{9}{(x-3)^3}$ — nad R, nad C
d) $\frac{1+(i/2)}{x+1+i} + \frac{1-(i/2)}{x+1-i}$ nad C
3. a) $(x+1) + \frac{2}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ — nad R
$(x+1) + \frac{2}{x-1} + \frac{(1/2)}{x+1+i} + \frac{(1/2)}{x+1-i}$ — nad C

b) $\frac{-1}{(x+1)^3}+\frac{1}{x+1}$, c) $\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}$
d) $\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{x-2}$, e) $\frac{2x+3}{x^2+2x+2}+\frac{4x+2}{(x^2+2x+2)^2}$ — nad R
$\frac{1}{x+1+i}+\frac{\frac{1}{2}+i}{(x+1+i)^2}+\frac{1}{x+1-i}+\frac{\frac{1}{2}-i}{(x+1-i)^2}$ — nad C
f) $\frac{1}{x-3}+\frac{x}{(x^2+2x+2)^2}$ — nad R,
$\frac{\frac{i}{4}}{x+1-i}-\frac{\frac{i}{4}}{x+1+i}+\frac{\frac{1-i}{4}}{(x+1-i)^2}+\frac{\frac{1+i}{4}}{(x+1+i)^2}$ — nad C

4. a) nad R: $\frac{a}{(2x+1)^3}+\frac{b}{(2x+1)^2}+\frac{c}{2x+1}++\frac{d}{(x-1)^2}+\frac{e}{x-1}+\frac{fx+g}{2x^2-2x+1}$, $a,b,c,d,e,f,g\in R$
nad C:
$\frac{a}{(2x+1)^3}+\frac{b}{(2x+1)^2}+\frac{c}{2x+1}++\frac{d}{(x-1)^2}+\frac{e}{x-1}+\frac{f}{x-(1+i)/2}+\frac{g}{x-(1-i)/2}$, $a,b,c,d,e,f,g\in C$
b) nad R
$\frac{ax+b}{(x^2+1)^3}+\frac{cx+d}{(x^2+1)^2}+\frac{ex+f}{x^2+1}+\frac{g}{(x-1)^3}+\frac{h}{(x-1)^2}+\frac{k}{x-1}+\frac{l}{(x+1)^3}+\frac{m}{(x+1)^2}+\frac{n}{x+1}$, $a,b,c,d,e,f,g,h,k,l,m,n\in R$
Nad C: $\frac{a}{(x+i)^3}+\frac{b}{(x+i)^2}+\frac{c}{x+i}+\frac{d}{(x-i)^3}+\frac{e}{(x-i)^2}+\frac{f}{x-i}+\frac{g}{(x-1)^3}+\frac{h}{(x-1)^2}+\frac{k}{x-1}+\frac{l}{(x+1)^3}+\frac{m}{(x+1)^2}+\frac{n}{x+1}$,
$a,b,c,d,e,f,g,h,k,l,m,n\in C$

4. SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

1. Riešte systémy lineárnych rovníc.

a.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2&=-3\\ 3x_2&=-6\end{aligned}$$
b.
$$\begin{aligned} 3x_1+x_2+2x_3&=11\\ -3x_2+x_3&=-3\\ 7x_3&=21\end{aligned}$$
c.
$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+3x_3&=5\\ -x_2+x_3&=i\\ 2x_3&=2+2i\end{aligned}$$
d.
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-3x_3&=-4\\ x_2-x_3&=2\end{aligned}$$

2. Napíšte sústavu lineárnych rovníc a množinu všetkých jej riešení, ak jej rozšírená matica je

a. $\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)$ b. $\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&2&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&3\end{array}\right)$
c. $\left(\begin{array}{ccc|c}1+i&1&1&1\\0&i&2&i\\0&0&1&1+i\end{array}\right)$ d. $\left(\begin{array}{cccc|c}0&-1&2&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)$
e. $\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&1&1\\0&0&1&0&0\end{array}\right)$ f. $\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&-2&1&0\\0&1&1&0&1\end{array}\right)$

3. Rozhodnite, či je daná matica stupňovitá.

a. $\begin{pmatrix}0&2&-1&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix}3&2&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix}3&2&-2&1\\0&0&2&1\\0&0&0&20\end{pmatrix}$

4. Riešte sústavy lineárnych rovníc

a.
$$\begin{aligned} x_1-x_2&=-2\\ -3x_1+2x_2&=3\end{aligned}$$
b.
$$\begin{aligned} 12x_1-x_2+5x_3&=30\\ 3x_1-13x_2+2x_3&=21\\ 7x_1+2x_2+3x_3&=15\end{aligned}$$
c.
$$\begin{aligned} 7x_1+3x_2-2x_3&=1\\ -x_1+6x_2-3x_3&=2\\ -10x_1+15x_2-11x_3&=4\end{aligned}$$
d.
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2-4x_3&=1\\ x_1-x_2+x_3&=2\\ 4x_1-x_2-2x_3&=5\end{aligned}$$
e.
$$\begin{aligned} 3x_1-x_2-6x_3-4x_4&=2\\ 3x_1+4x_2+3x_3-2x_4&=12\\ 4x_1+3x_2-3x_3+4x_4&=-1\\ 5x_1+4x_2-9x_3&=5\end{aligned}$$
f.
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+2x_3-6x_4&=1\\ 2x_1+2x_2-6x_3+2x_4&=2\\ 2x_1-6x_2+2x_3+2x_4&=3\\ -6x_1+2x_2+2x_3+2x_4&=4\end{aligned}$$
g.
$$\begin{aligned} 2x_1+(2-i)\,x_2&=9\\ -x_1+x_2&=i\end{aligned}$$
h.
$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_2&=2+i\\ x_1+4x_2+7x_3&=14-3i\\ x_1+3x_2+4x_3&=8-2i\end{aligned}$$

5. Riešte dva systémy s rovnakou maticou pomocou eliminácie na matici 3×5.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-2x_3&=1\\ 2x_1+5x_2+x_3&=9\\ x_1+3x_2+4x_3&=9\end{aligned}\qquad \begin{aligned} x_1+2x_2-2x_3&=9\\ 2x_1+5x_2+x_3&=9\\ x_1+3x_2+4x_3&=-2\end{aligned}$$

6. Riešte homogénne sústavy lineárnych rovníc

a.
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+3x_3+x_4&=0\\ x_1-x_2+x_3+x_4&=0\\ 3x_1+x_2+2x_3&=0\end{aligned}$$
b.
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+3x_3+x_4&=0\\ x_1-x_2+x_3+x_4&=0\\ 3x_1+x_2+2x_3&=0\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=0\end{aligned}$$

Výsledky

1. a) $(1,-2)$, b) $(1,2,3)$, c) $(-i,1,1+i)$
d) $\{(-3+a,2+a,a)\colon a\in R\}$
2. a) $\{(2+p,p,0,-1)\colon p\in R\}$, b) $\emptyset$,
c) $(-1-2i,-1+2i,1+i)$, d) $\{(a,-2,0,-1)\colon a\in R\}$,
e) $\{(1+b-a,b,0,a)\colon a,b\in R\}$,
f) $\{\left(\frac{1+p-q}{2},1-p,p,q\right)\colon p,q\in R\}$
3. a) áno, b) nie, c) áno

4. a) $(1,3)$, b) $(2,-1,1)$, c) $\left(\frac{1}{60},\frac{83}{180},\frac{1}{4}\right)$
d) $\left(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2}\right)$, e) $\left(0,2,\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)$, f) $\emptyset$, g) $(2,2+i)$,
h) $(i,-i,2)$
5. $(-1,2,1)$, $(3,1,-2)$
6. a) $\{a(-2,4,1,5)\colon a\in R\}$, b) $\{(0,0,0,0)\}$

5. MATICOVÉ OPERÁCIE

1. Vypočítajte $2A$, $A+B$, AB, BA (ak existujú) pre matice:

a. $A=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\2&1&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\-1&-1&1&2\end{pmatrix}$

b. $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

c. $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\1&0\end{pmatrix}$,

d. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$,

2. K danej matici nájdite inverznú maticu.

a. $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\3&3&1\end{pmatrix}$ f. $\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$

g. $\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$ h. $\begin{pmatrix}2&5&0&0\\1&3&0&0\\0&0&1&3\\0&0&1&4\end{pmatrix}$

i. $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$

j. $\begin{pmatrix}3&3&-4&-3\\0&6&1&1\\5&4&2&1\\2&3&3&2\end{pmatrix}$ k. $\begin{pmatrix}2&5&0&0&0\\1&3&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&2&5\\0&0&0&1&3\end{pmatrix}$

Výsledky

1. a) $2A=\begin{pmatrix}2&2&0&-2\\4&2&-2&2\end{pmatrix}$,
$A+B=\begin{pmatrix}5&4&2&0\\1&0&0&3\end{pmatrix}$, $AB\nexists$, $BA\nexists$
b) $2A=\begin{pmatrix}2&4\\6&-2\end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix}1&3\\3&-1\end{pmatrix}$,
$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}3&-1\\0&0\end{pmatrix}$,
c) $2A=\begin{pmatrix}-2&2&2\\0&4&2\\0&0&6\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}0&3\\1&4\\3&0\end{pmatrix}$,
$A+B\nexists$, $BA\nexists$
d) $2A=\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$,
$A+B\nexists$, $BA\nexists$

2. a) $\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}4&-3\\-1&1\end{pmatrix}$, c) $\nexists$,
d) $\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$, e) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-7&-1\\-6&8&2\\3&-3&-1\end{pmatrix}$,
f) $\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$, g) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$,
h) $\begin{pmatrix}3&-5&0&0\\-1&2&0&0\\0&0&4&-3\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$, i) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$,
j) $\begin{pmatrix}-7&5&12&-19\\3&-2&-5&8\\41&-30&-69&111\\-59&43&99&-159\end{pmatrix}$,
k) $\begin{pmatrix}3&-5&0&0&0\\-1&2&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&3&-5\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$

6. DETERMINANTY

1. Vypočítajte nasledujúce determinanty.

a. $\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix}2&-1\\-4&2\end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix}2+i&2\\5&5-i\end{vmatrix}$
d. $\begin{vmatrix}2&0\\2&2\end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix}a-2&a+2\\b-2&b+2\end{vmatrix}$, f. $\begin{vmatrix}\sin\alpha&-\cos\alpha\\\cos\alpha&\sin\alpha\end{vmatrix}$

2. Pre maticu $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&5&7\\0&3&0\end{pmatrix}$

(a) Vypočítajte hodnoty $\det A_{31}$, $\det A_{32}$, $\det A_{33}$, kde A_{ij} je matica, ktorá vznikne z matice A vynechaním riadku R_i a stĺpca S_j.

(b) Vypočítajte hodnoty algebraických doplnkov $\tilde{a}_{31}$, $\tilde{a}_{32}$, $\tilde{a}_{33}$.

(c) Pomocou výsledkov z častí a), b) vypočítajte $\det A$

3. Platí tvrdenie: Ak $A,B\in C^{3\times 3}$, tak $\det(A+B)=\det A+\det B$? Svoje tvrdenie odôvodnite.

4. Napíšte hodnotu determinantu

a. $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&2&3\end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix}1&0&2\\3&0&-1\\5&0&4\end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&-5&0&0\\1&1&2&1\\0&0&1&3\end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix}0&0&5\\0&-3&3\\3&1&7\end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix}1&1&1&3\\0&3&2&2\\0&0&5&5\\1&1&1&2\end{vmatrix}$, f. $\begin{vmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}$

5. Vypočítajte determinanty

a. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ a & b & a & b \\ c & d & c & d \end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 5 & -1 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

6. Vypočítajte determinanty matíc stupňa $n, n > 1$

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Výsledky

1. a) -4, b) 0, c) $1+3i$, d) 4, e) $4(a-b)$, f) 1
2. a) 11, 1, -4, b) 11, -1, -4, c) -3
3. Nie. Návod na odôvodnenie: nájdite maticu $A \in C^{3\times3}$, pre ktorú $\det 2A \neq 2 \det A$.
4. a) 0, b) 0, c) -25, d) 45, e) -15, f) 1.
5. a) 0, b) $(ad-bc)^2$, c) -48, d) -4, e) 19×6^4
6. a) $(-1)^{n+1}n$, b) $\prod\limits_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)$

7. LINEÁRNA ZÁVISLOSŤ A NEZÁVISLOSŤ V C^n

1. Rozhodnite, či sú nasledujúce podmnožiny C^3 lineárne nezávislé, tie ktoré sú nezávislé doplňte na bázu C^3.

a. $\{(1,1,1),(1,1,-1)\}$,

b. $\{(1,1,1),(1,1,-1),(0,0,2)\}$,

c. $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$,

2. Zistite, či $\mathbf{b}$ je lineárnou kombináciou prvkov množiny $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, ak

a. $\mathbf{b} = (1,2,3)$, $\mathbf{b}_1 = (1,1,1)$
$\mathbf{b}_2 = (1,1,-1)$, $\mathbf{b}_3 = (0,0,2)\}$.

b. $\mathbf{b} = (1,2,3)$, $\mathbf{b}_1 = (1,1,1)$
$\mathbf{b}_2 = (1,1,0)$, $\mathbf{b}_3 = (0,1,1)\}$.

c. $\mathbf{b} = (1,2,3)$, $\mathbf{b}_1 = (1,2,0)$
$\mathbf{b}_2 = (1,2,-1)$, $\mathbf{b}_3 = (0,0,1)\}$.

3. Určte hodnosť matice:

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

b. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 5 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

d. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. Zistite aká je dimenzia podpriestoru $M \subset R^4$ tak, že ho vyjadríte ako lineárny obal lineárne nezávislej množiny.

a. $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 \colon x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$

b. $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 \colon x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}$.

Výsledky

1. a) nezávislá, b) závislá, c) nezávislá
2. a) nie je, b) je, c) je,
3. a) 2, b) 3, c) 4, d) 3, e) 2

4a. $M = \{(-2a+b-c, a, b, c) \colon a,b,c \in R\} = \mathrm{Lo}\{(-2,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$, $\dim M = 3$.

b. $M = \mathrm{Lo}\{(-2,1,0,0),(-2,0,-1,1)\}$, $\dim M = 2$.

8. VEKTORY V 3–ROZMERNOM PRIESTORE.

1. Vypočítajte skalárny súčin $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ a zistite, či je ich uhol α ostrý, tupý alebo pravý.

a. $\mathbf{u} = (1,-1,2)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

b. $\mathbf{u} = (1,1,1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

c. $\mathbf{u} = (2,-2,1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

2. Nájdite ortogonálnu projekciu vektora $\mathbf{u}$ do smeru vektora $\mathbf{v}$ a nájdite zložku kolmú na $\mathbf{v}$.

a. $\mathbf{u} = (3,-5,2)$, $\mathbf{v} = (-3,0,4)$,

b. $\mathbf{u} = (-1,2,1)$, $\mathbf{v} = (2,2,1)$

3. Ukážte, že $A = (2,-1,1)$, $B = (3,2,-1)$ a $C = (7,0,-2)$ sú vrcholy pravouhleho trojuholníka. Pri ktorom vrchole je pravý uhol? Vypočítajte jeho obsah P_{ABC}.

4. Vypočítajte $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

a. $\mathbf{u} = (1,-2,-1)$, $\mathbf{v} = (0,1,1)$.

b. $\mathbf{u} = (-2,1,3)$, $\mathbf{v} = (4,-2,-6)$

5. Nájdite vektor dĺžky 1 kolmý aj na $\mathbf{u}$ aj na $\mathbf{v}$.

a. $\mathbf{u} = (1,1,-1)$, $\mathbf{v} = (0,3,1)$

b. $\mathbf{u} = (2,1,0)$, $\mathbf{v} = (0,1,2)$

6. Nájdite obsah trojuholníka ABC.

a. $A = (2,0,1)$, $B = (3,-1,2)$, $C = (-3,4,2)$

b. $A = (1,3,2)$, $B = (5,3,1)$, $C = (-3,1,2)$

7. Nájdite objem rovnobežnostena vytvoreného vektormi $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.
a) $A=(-2,3,1)$, $B=(1,-2,3)$, $C=(2,1,0)$, $D=(3,2,1)$
b) $A=(-1,4,2)$, $B=(2,3,4)$, $C=(0,4,2)$, $D=(3,6,3)$
8. Vypočítajte $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$, ak
a. $\|\mathbf{a}\|=3$, $\|\mathbf{b}\|=2$ a uhol medzi $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je 60°
b. $\|\mathbf{a}\|=5$, $\|\mathbf{b}\|=8$ a $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=24$
9. Vypočítajte $\|(3\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-3\mathbf{b})\|$, ak
a. $\|\mathbf{a}\|=3$, $\|\mathbf{b}\|=1$ a uhol medzi $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je $\frac{\pi}{6}$,
b. $\|\mathbf{a}\|=2$, $\|\mathbf{b}\|=3$ a $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-3\sqrt{3}$

Výsledky

1. a) 0, pravý, b) -1, tupý, c) 3, ostrý
2. a) $P_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=-\frac{1}{25}(-3,0,4)$, $(3,-5,2)+\frac{1}{25}(-3,0,4)$,
   b) $P_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\frac{1}{3}(2,2,1)$, $(-1,2,1)-\frac{1}{3}(2,2,1)$.
3. Pri vrchole B. $P_{ABC}=\frac{7\sqrt{6}}{2}$.

4a) $(-1,-1,1)$, b) $(0,0,0)$
5a) $\frac{\pm1}{\sqrt{26}}(4,-1,3)$, b) $\frac{\pm1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$
6a) $\frac{1}{2}\sqrt{62}$, b) $\sqrt{21}$.
7a) 34, b) 5
8a) $3\sqrt{3}$, b) 32
9a) 15, b) 30

9. PRIAMKY A ROVINY V PRIESTORE

1. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny s normálovým vektorom $\mathbf{n}$, ktorá prechádza bodom P.
a. $P=(1,2,3)$, $\mathbf{n}=(2,-3,1)$
b. $P=(-2,3,5)$, $\mathbf{n}=(3,7,-2)$
2. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcu cez body A,B,C.
a. $A=(1,0,-1)$, $B=(0,2,3)$, $C=(-2,1,1)$
b. $A=(-1,3,2)$, $B=(2,1,-1)$, $C=(3,2,1)$
3. Rozhodnite, či roviny sú rovnobežné.
a. $2x-y+3z+3=0$, $-4x+2y+9z+1=0$
b. $-x+3y+2z+1=0$, $2x-6y-4z+5=0$
4. Rozhodnite, či priamka p a rovina ρ sú rovnobežné.
a. $p\colon x=1+2t, y=3-t, z=-1-4t,\ t\in R$; $\rho\colon 3x+2y+5z-7=0$
b. $p\colon x=t, y=2t, z=2t,\ t\in R$; $\rho\colon 2x+4y-5z+3=0$
5. Rozhodnite, či sú priamka p a rovina ρ kolmé.
a. $p\colon x=1+2t, y=3-t, z=-1-4t,\ t\in R$; $\rho\colon -4x+2y+8z+3=0$
b. $p\colon x=4+3t, y=1-2t, z=-1+4t,\ t\in R$; $\rho\colon x-5y+2z-7=0$
6. Nájdite parametrické rovnice priamky p, ktorá je priesečnicou rovín
a) $\rho_1\colon -2x+3y+7z+2=0$, $\rho_2\colon x+2y-3z+5=0$
b) $\rho_1\colon 3x-5y+2z=0$, $\rho_2\colon x+z=0$
7. Nájdite rovnicu roviny prechadzajúcej cez bod $(-1,4,-3)$, ktorá je kolmá na priamku $x=2+t, y=-3+2t, z=-t,\ t\in R$.
8. Nájdite rovnicu roviny ρ prechadzajúcej cez bod $(-1,2,4)$, ktorá je rovnobežná s rovinou
a. xy, b. xz, c. $x+y+z+1=0$.
9. Nájdite rovnicu roviny, prechádzajúcej cez bod $(-1,4,2)$, ktorá obsahuje priesečnicu rovín $4x-y+z-2=0$ a $2x+y-2z-3=0$.
10. Nájdite rovnicu roviny, ktorá je rovinou súmernosti bodov (2, - 1, 1) a (3, 1, 5).
11. Nájdite priesečník priamok
a. $p\colon x=-1+4t, y=3+t, z=1,\ t\in R$ a $q\colon x=-13+12t, y=1+6t, z=2+3t,\ t\in R$.
b. $p\colon x=-1+4t, y=3+t, z=1,\ t\in R$ a $q\colon x=-13+12t, y=1+6t, z=1+3t,\ t\in R$.

Výsledky

1a) $2x-3y+z+1=0$, b) $3x+7y-2z-5=0$.
2a) $2y-z-1=0$, b) $x+9y-5z-16=0$.
3a) rôznobežné, b) rovnobežné.
4a) nie, b) áno $p\parallel\rho$.
5a) áno, $p\perp\rho$, b) nie.
6a) $p\colon x=-41-23t, y=t, z=-12-7t,\ t\in R$,
b) $p\colon x=5t, y=t, z=-5t,\ t\in R$.
7. $\rho\colon (x+1)+2(y-4)-(z+3)=0$
8a) $\rho\colon z=4$, b) $\rho\colon y=2$,
c) $\rho\colon (x+1)+(y-2)+(z-4)=0$.
9. $4x-13y+21z-14=0$.
10. $\left(x-\frac{5}{2}\right)+y+4(z-3)=0$
11a) $p\cap q=(-17,-1,1)$, b) $p\cap q=\emptyset$.