

Definícia. Nech $f: A \rightarrow R$, $a \in A$. Hovoríme, že funkcia f má v bode a

1. *lokálne minimum (ostré lokálne minimum)*, ak existuje $O_\delta(a)$ také, že:
 $\forall x \in O_\delta(a) \cap A: f(x) \geq f(a) \quad (f(x) > f(a)),$
2. *lokálne maximum (ostré lokálne maximum)*, ak existuje $O_\delta(a)$ také, že:
 $\forall x \in O_\delta(a) \cap A: f(x) \leq f(a) \quad (f(x) < f(a)).$

Definícia. Nech $f: A \rightarrow R$, $a \in A$. Hovoríme, že funkcia f má v bode a

1. *globálne minimum*, ak $\forall x \in A: f(x) \geq f(a),$
2. *globálne maximum*, ak $\forall x \in A: f(x) \leq f(a).$

Definícia. Nech $f: A \rightarrow R$, $a \in \text{Int } A$. Ak f má v bode a lokálny extrém a je v bode a diferencovateľná, tak $f'(a) = 0$.

Stacionárny bod — bod, v ktorom má funkcia 1. deriváciu rovnú 0.

Poznámka. Jediné body, v ktorých spojitá funkcia môže nadobúdať extrém sú krajné body definičného oboru, body, v ktorých neexistuje derivácia funkcie, stacionárne body.

Intervaly monotónnosti.

Veta (Postačujúca podmienka monotónnosti). Nech I je interval, funkcia f je spojitá na I a diferencovateľná na $\text{Int } I$.

- (a) Ak $\forall x \in \text{Int } I: f'(x) \geq 0$, tak f je neklesajúca na I .
- (b) Ak $\forall x \in \text{Int } I: f'(x) > 0$, tak f je rastúca na I .
- (c) Ak $\forall x \in \text{Int } I: f'(x) \leq 0$, tak f je nerastúca na I .
- (d) Ak $\forall x \in \text{Int } I: f'(x) < 0$, tak f je klesajúca na I .

Intervaly konvexnosti, konkávnosti.

Definícia. Nech I je interval, nech $f: I \rightarrow R$. Ak $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, platí:

- (a) $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq (<) \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$, tak f sa nazýva (rýdzo)konvexná funkcia.
- (b) $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq (>) \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$, tak f sa nazýva (rýdzo)konkávna funkcia.

Veta (Postačujúca podmienka konvexnosti, konkávnosti). Nech I je interval, funkcia f je spojitá na I a dvakrát diferencovateľná na $\text{Int } I$.

- (a) Ak $\forall x \in \text{Int } I: f''(x) \geq 0$, tak f je konvexná na I .
- (b) Ak $\forall x \in \text{Int } I: f''(x) > 0$, tak f je rýdzo konvexná na I .
- (c) Ak $\forall x \in \text{Int } I: f''(x) \leq 0$, tak f je konkávna na I .
- (d) Ak $\forall x \in \text{Int } I: f''(x) < 0$, tak f je rýdzo konkávna na I .

Definícia. Nech funkcia f je dvakrát diferencovateľná na $O_\delta(a)$. Ak $\forall x_1, x_2 \in O_\delta(a)$, $x_1 < a < x_2: f''(x_1)f''(x_2) < 0$, tak a sa nazýva inflexný bod funkcie.

Taylorova veta. Nech funkcia f je $(n+1)$ -krát diferencovateľná na $O_\delta(a)$. Potom $\exists c \in O_\delta(a) \forall x \in O_\delta(a)$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}.$$

Dôsledok. *Nech $n \geq 2$ je párne prirodzené číslo, funkcia f je n -krát spojitely diferencovateľná na $O_\delta(a)$, nech $f^{(i)}(a) = 0, i = 1, \dots, n-1, f^{(n)}(a) \neq 0$. Potom platí:*

1. *ak $f^{(n)}(a) < 0$, tak f má v bode a ostré lokálne maximum,*
2. *ak $f^{(n)}(a) > 0$, tak f má v bode a ostré lokálne minimum.*

Dôsledok. *Nech $n \geq 3$ je nepárne prirodzené číslo, funkcia f je n -krát spojitely diferencovateľná na $O_\delta(a)$, nech $f^{(i)}(a) = 0, i = 2, \dots, n-1, f^{(n)}(a) \neq 0$. Potom a je inflexný bod funkcie.*

Asymptoty bez smernice.

Priamka $x = a, a \in R$, sa nazýva asymptotou ku grafu funkcie, ak aspoň jedna jednostranná limita funkcie v bode a je nevlastná.

Asymptoty so smernicou.

Priamka $y = kx + q, a \in R$, sa nazýva asymptotou ku grafu funkcie v $\pm\infty$, ak

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in R, \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] \in R.$$

Priebeh funkcie — postup.

1. Definičný obor funkcie, nulové body ($x \in D(f): f(x) = 0$).
2. Vlastnosti funkcie (párna, nepárna, periodická).
3. Spojitosť funkcie, limity funkcie v bodoch nespojitosti.
4. Intervaly monotónnosti funkcie.
5. Lokálne extrémny funkcie.
6. Intervaly, na ktorých je funkcia konvexná, konkávna.
7. Inflexné body funkcie.
8. Limity v krajných bodoch definičného oboru, asymptoty.
9. Graf funkcie.
10. Obor hodnôt funkcie.