

## POSTUPNOSTI REÁLNYCH ČÍSEL

**Definícia.** Funkcia  $f: N \rightarrow R$  sa nazýva postupnosť reálnych čísel. Ak označíme  $f(n) = a_n$ , tak čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  určujú postupnosť. Číslo  $a_n$  sa nazýva  $n$ -tý člen postupnosti, označenie  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

*Poznámka.* Množina prirodzených čísel má jediný hromadný bod  $\infty$ , preto limitu postupnosti môžeme počítat len v  $\infty$ .

**Definícia.** Nech  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je postupnosť reálnych čísel,  $a \in R^*$ . Ak  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in N \forall n \geq n_0: a_n \in O_\epsilon(a)$ , tak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

**Definícia.** Postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  sa nazýva konvergentná, ak existuje vlastná limita postupnosti. V ostatných prípadoch sa nazýva divergentá.

**Definícia.** Ak  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je postupnosť reálnych čísel a  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  je rastúca postupnosť prirodzených čísel ( $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ ), tak  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  sa nazýva podpostupnosť postupnosti (vybraná postupnosť z postupnosti)  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Veta.** Každá vybraná postupnosť z konvergentnej postupnosti je konvergentná.

**Definícia.**

1. Ak  $\exists k \in R: \forall n \in N: k \leq a_n$ , tak hovoríme, že postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je zdola ohraničená.
2. Ak  $\exists K \in R: \forall n \in N: a_n \leq K$ , tak hovoríme, že postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je zhora ohraničená.
3. Ak postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je zdola a zhora ohraničená, tak hovoríme, že je ohraničená.

**Veta.** Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.

*Dôkaz.* Postupnosť je konvergentná, t.j.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in R$ , k  $\epsilon = 1 \exists n_0 \in N: \forall n \geq n_0: |a_n - a| < 1$ . Ak zvolíme  $k = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a - 1\}$ ,  $K = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a + 1\}$ , tak platí:  $\forall n \in N: k \leq a_n \leq K$ .

**Veta.** Z každej ohraničenej postupnosti sa dá vybrať konvergentná podpostupnosť.

**Definícia (Monotónne postupnosti).**

Nech  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je postupnosť reálnych čísel. Ak  $\forall n \in N$  platí:

- (a)  $a_n < a_{n+1}$  ( $a_n \leq a_{n+1}$ ), tak postupnosť sa nazýva rastúca (neklesajúca).
- (b)  $a_n > a_{n+1}$  ( $a_n \geq a_{n+1}$ ), tak postupnosť sa nazýva klesajúca (nerastúca).

**Veta.** Každá monotónna ohraničená postupnosť je konvergentná.

**Veta (Heineho definícia limity).** Nech  $f: A \rightarrow R$ ,  $a \in R^*$  je hromadný bod  $A$ . Platí:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  práve vtedy, keď pre každú postupnosť  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  bodov z množiny  $A \setminus \{a\}$  takých, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  platí:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ .

Geometrická postupnosť  $\{aq^n\}_{n=0}^{\infty}$

Ak  $a \neq 0$ , tak geometrická postupnosť je konvergentná  $\iff |q| < 1$  alebo  $q = 1$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} aq^n = \begin{cases} (\operatorname{sgn} a)\infty & q > 1 \\ a & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}.$$