## Maticová algebra

**Definícia.** *Nech* $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, $A,\ B \in C^{m\times n}$, $\alpha \in C$. *Potom*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}, \qquad \alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}.$$

**Definícia.** *Nech* $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le k}} \in C^{m\times k}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le n}} \in C^{k\times n}$. *Potom súčin matíc* $A\cdot B = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in C^{m\times n}$ *je definovaný:*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj},\ \ i = 1,\dots m,\ \ j = 1,\dots n.$$

**Vlastnosti operácií s maticami.**
$\forall\ A, B, D \in C^{m\times n}$, $\forall\ \alpha, \beta \in C$ *platí:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a)* | $A + B = B + A$ | *c)* | $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ |
| *b)* | $(A + B) + D = A + (B + D)$ | *d)* | $(\alpha\cdot\beta)A = \alpha(\beta\cdot A)$ |

$\forall\ A \in C^{m\times k}$, $\forall\ B \in C^{k\times l}$, $\forall\ D \in C^{l\times n}$ *platí:* $(A\cdot B)\cdot D = A\cdot(B\cdot D)$.
$\forall\ A, B \in C^{m\times k}$, $\forall\ D \in C^{k\times n}$, $\forall\ E \in C^{l\times m}$ *platí:*

$$(A + B)D = AD + BD, \qquad E(A + B) = EA + EB.$$

*Poznámka.* Komutatívny zákon pre súčin matíc neplatí.

Transponovaná matica $A^T = (a_{ji}) \in C^{n\times m}$ k matici $A = (a_{ij}) \in C^{m\times n}$.

Jednotková matica $I_n = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$: $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

## Štvorcové matice

**Definícia.** *Matica* $A \in C^{n\times n}$ *sa nazýva regulárna, ak existuje matica* $B \in C^{n\times n}$ *taká, že* $AB = BA = I_n$.

**Definícia.** *Ak* $A, B \in C^{n\times n}$ *a platí* $AB = BA = I_n$, *tak matica* $B$ *sa nazýva inverzná matica k matici* $A$, *označujeme* $B = A^{-1}$.

Ako nájsť inverznú maticu k matici $A \in C^{2\times 2}$:
Nech $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ a $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$. Platí $AA^{-1} = I_2$,

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ riešenie 2 sústav súčasne $\Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^{ERO} \dots^{ERO} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \end{array}\right).$$

Postup pri hľadaní inverznej matice $(A|I_n) \sim^{ERO} \dots^{ERO} \sim \big(I_n|A^{-1}\big)$.

## Determinanty

**Definícia.** *Nech* $n \in N$, $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, *nech* $A_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, *je matica, ktorá vznikne z matice* $A$ *vynechaním riadka* $R_i$ *a stĺpca* $S_j$. *Determinantom matice* $A$ *sa nazýva číslo* $\det A = |A|$ *definované nasledovne:*
*1. Ak* $n = 1$, *tak* $\det A = a_{11}$.
*2. Ak* $n > 1$, *tak* $\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}$.

**Veta.** *Nech* $A \in C^{n\times n}$, $n > 1$. *Potom platí:*
*1. Ak matica* $B$ *vznikne z matice* $A$ *vzájomnou výmenou dvoch riadkov, tak*
$\det B = -\det A$, $(A_{R_i \leftrightarrow R_j} \sim B,\ i \neq j)$.
*2. Ak matica* $B$ *vznikne z matice* $A$ *vynásobením riadka číslom* $\alpha \in C$, *tak*
$\det B = \alpha \det A$, $(A_{\alpha R_i \to R_i} \sim B)$.
*3. Ak matica* $B$ *vznikne z matice* $A$ *pripočítaním násobku nejakého riadku k inému riadku, tak*
$\det B = \det A$, $(A_{R_i + \alpha R_j \to R_i} \sim B,\ i \neq j)$.

*Označenie.* Ak $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ sa nazýva algebraický doplnok k prvku $a_{ij}$.

**Veta.** *Nech* $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, $n > 1$. *Pre* $i, j \in \{1, \dots, n\}$ *platí:*
*(a)* $\det A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik}$ *(rozvoj podľa i-teho riadku).*
*(b)* $\det A = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{lj}\tilde{a}_{lj}$ *(rozvoj podľa j-teho stĺpca).*

**Definícia.** *Matica* $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ *sa nazýva*
*(a) horná trojuholníková, ak* $\forall i, j = 1, \dots, n$ *platí: ak* $i > j$, *tak* $a_{ij} = 0$,
*(b) dolná trojuholníková, ak* $\forall i, j = 1, \dots, n$ *platí: ak* $i < j$, *tak* $a_{ij} = 0$,
*(c) diagonálna, ak* $\forall i, j = 1, \dots, n$ *platí: ak* $i \neq j$, *tak* $a_{ij} = 0$.

**Veta.** *Ak* $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ *je trojuholníková matica, tak* $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

**Veta (Cramerovo pravidlo).** *Ak matica* $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ *sústavy lineárnych rovníc s n neznámymi je regulárna, tak existuje jediné riešenie*

$$\mathbf{x} = \left(\frac{D_1}{|A|}, \frac{D_2}{|A|}, \dots, \frac{D_n}{|A|}\right),\ D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Definícia.** *Nech* $A \in C^{n\times n}$, $\tilde{a}_{ij}$ *je algebraický doplnok k prvku* $a_{ij}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

$$\textit{Matica } \tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})^T, \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \dots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

*sa nazýva adjungovaná matica k matici* $A$.

**Veta.** *Nech* $\tilde{A} \in C^{n\times n}$ *je adjungovaná matica k matici* $A \in C^{n\times n}$. *Potom platí:* $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)I_n$. *Ak* $det A \neq 0$, *tak* $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$.

**Veta.** *Nech* $A \in C^{n\times n}$. *Potom platí:*
*(a)* $h(A) = n \iff \det A \neq 0$.
*(b)* $h(A) = n \iff \exists A^{-1}$.