

LINEÁRNA ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST PRVKOV R^n , C^n

$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in R, i = 1, \dots, n\}$ — množina všetkých usporiadaných n -tíc nad R .

$C^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in C, i = 1, \dots, n\}$ — množina všetkých usporiadaných n -tíc nad C .

Definícia (Súčet a násobok skalárom).

Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n (\in C^n), \alpha \in R (\in C)$. Potom

$$(1) \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$(2) \quad \alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Definícia (Lineárna kombinácia prvkov). Nech $k \in N, \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in C^n$. Ak $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in C: \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k$, tak $\mathbf{x}$ sa nazýva lineárnou kombináciou prvkov $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$.

Definícia. Prvky $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in C^n$ sa nazývajú lineárne nezávislé, ak majú nasledujúcu vlastnosť: ak $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, tak $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. Prvky $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in C^n$ sa nazývajú lineárne závislé, ak aspoň jeden koeficient je nenulový, t.j. $\exists \alpha_i \neq 0$.

Veta. Prvky $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in C^n$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden prvok je lineárnou kombináciou ostatných prvkov.

SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

Definícia matice. Tabuľka reálnych (komplexných čísel)

$$a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ sa}$$

nazýva matica typu $m \times n$ nad reálnymi (komplexnými) číslami. Usporiadaná n -tica $R_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ sa nazýva i -tý riadok matice, $i = 1, 2, \dots, m$. Usporiadaná

$$m\text{-tica } S_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ sa nazýva } j\text{-tý stĺpec matice, } j = 1, 2, \dots, n. \text{ Ak } m = n, \text{ tak}$$

A sa nazýva štvorcová matica.

$R^{m \times n}$ — množina všetkých matíc typu $m \times n$ nad R .

$C^{m \times n}$ — množina všetkých matíc typu $m \times n$ nad C .

$$\text{Formy zápisu matice: } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = (a_{ij})_n^m = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} = (S_1 \ S_2 \ \dots \ S_n).$$

Definícia (Hodnosť matice). Maximálny počet lineárne nezávislých riadkov matice $A \in C^{m \times n}$ sa nazýva hodnosť matice, označujeme $h(A)$.

Poznámka. Ak stupňovitá matica B je ekvivalentná s maticou A , tak hodnosť matice A je počet nenulových riadkov matice B .

Frobéniova veta. Sústava lineárnych rovníc má riešenie práve vtedy, keď hodnosť matice sústavy sa rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy.

Veta (matice $\longleftrightarrow$ sústavy). Nech $A \in C^{m \times n}$ je matica sústavy, $A' \in C^{m \times (n+1)}$ je rozšírená matica sústavy lineárnych rovníc (S_A) . Potom platí:

1. Ak $h(A) \neq h(A')$, tak sústava nemá riešenie.
2. Ak $h(A) = h(A') = n$, tak sústava má práve jedno riešenie.
3. Ak $h(A) = h(A') = k < n$, tak sústava má nekonečne veľa riešení, na určenie množiny riešení potrebujeme $n - k$ parametrov.

Poznámka. Ak $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, tak (S) sa nazýva homogénna sústava, ak $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, tak (S) sa nazýva nehomogénna sústava.

Dôsledok. Každá homogénna sústava lineárnych rovníc má aspoň jedno riešenie.