Komplexné čísla

Algebraický tvar komplexného čísla

Množina komplexných čísel: $C = \{a + ib,\ a, b \in R\}$,
$z = a + ib$ sa nazýva algebraický tvar komplexného čísla z,
$a = \mathrm{Re}\,(z)$ sa nazýva reálna časť z, $b = \mathrm{Im}\,(z)$ sa nazýva imaginárna časť z,
$\overline{z} = a - ib$ sa nazýva komplexne združené číslo k číslu z.

Operácie s komplexnými číslami

$$\begin{aligned} \forall a, b, c, d, \alpha \in R: \quad (a + ib) + (c + id) &= (a + c) + i(b + d) \\ \alpha(a + ib) &= \alpha a + i\alpha b \\ (a + ib) \cdot (c + id) &= (ac - bd) + i(ad + bc) \\ \frac{1}{a + ib} &= \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2},\ ab \neq 0. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \qquad i^n = i^k,\ n = 4l + k,\ n \in N, l \in N \cup \{0\},\ k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Vlastnosti komplexne združených čísel
$\forall z, w \in C$ platí:

1. $\overline{(\overline{z})} = z$, 2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ 4. ak $w \neq 0$, tak $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

$\forall z \in C$ platí: $a = \mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $b = \mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Absolútna hodnota komplexného čísla: $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Vlastnosti absolútnej hodnoty

$$\begin{aligned} \forall z, w \in C: \quad & 1.\quad |z + w| \le |z| + |w| \quad \text{(trojuholníková nerovnosť)} \\ & 2.\quad |\overline{z}| = |z| \\ & 3.\quad z\overline{z} = |z|^2 \\ & 4.\quad |zw| = |z||w|. \end{aligned}$$

Goniometrický tvar komplexného čísla $z \in C \setminus \{0\}$

$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$ sa nazýva argument komplexného čísla.

Moivreov vzorec

Nech $z \in C \setminus \{0\},\ z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Potom $\forall n \in N$ platí:
$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Riešenie binomickej rovnice $\quad z^n = c, \quad c \in C \setminus \{0\}, \quad n \in N.$

Ak $c = |c|\,(\cos\psi + i\sin\psi)$, tak binomická rovnica má práve n riešení:
$$z_k = \sqrt[n]{|c|}\left(\cos\frac{\psi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \dots n-1.$$

Polynómy

Definícia. *Nech $a_0, a_1, \dots, a_n \in R (\in C)$. Zobrazenie, ktoré $\forall x \in R (x \in C)$ priradí číslo $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ sa nazýva polynóm nad R (nad C) s koeficientami $a_0, a_1, \dots, a_n$. Ak $a_n \neq 0$, tak $n \in N \cup \{0\}$ sa nazýva stupeň polynómu f, označujeme $st\, f = n$. Ak $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, tak f sa nazýva nulový polynóm a $st\, f = -\infty$.*

Operácie s polynómami

Nech f, g sú polynómy nad R (nad C). Potom aj $f \pm g,\ f \cdot g,\ \alpha f$ sú polynómy nad R (nad C) a platí:

$$\begin{aligned} \mathrm{st}\,(f \pm g) &\le \max\{\mathrm{st}\, f, \mathrm{st}\, g\} \\ \mathrm{st}\,(f \cdot g) &= \mathrm{st}\, f + \mathrm{st}\, g \\ \mathrm{st}\,(\alpha f) &= \mathrm{st}\, f, \quad \forall \alpha \in R \setminus \{0\}\ (\alpha \in C \setminus \{0\}). \end{aligned}$$

Rovnosť dvoch polynómov – rovnosť koeficientov pri rovnakých mocninách.

$P(R)$ $(P(C))$ – množina všetkých polynómov nad R (nad C).

Veta (Delenie polynómu polynómom).
$\forall f, g \in P(C) \quad \exists q, r \in P(C)\colon f = q \cdot g + r, \quad st\, r < st\, g.$

Definícia. *Nech f je polynóm nad C. Číslo $c \in C$ sa nazýva koreň polynómu f, ak $f(c) = 0$.*

Základná veta algebry. *Každý polynóm aspoň prvého stupňa má koreň v C.*

Veta. *Nech f je polynóm nad C a nech $c \in C$. Potom zvyšok po delení polynómu f polynómom g, $g(x) = x - c$, sa rovná hodnote $f(c)$.*

Dôkaz. Ak delíme polynóm f polynómom g, $\mathrm{st}\, g = 1$, tak zvyšok r má stupeň menší ako stupeň polynómu g, t.j. buď je $\mathrm{st}\, r = 0$ alebo $\mathrm{st}\, r = -\infty$. Teda zvyšok je konštantou.

Platí: $\exists q \in P(C) \quad \exists r \in C\colon \forall x \in C\colon f(x) = q(x)(x - c) + r$, $(\mathrm{st}\, q = \mathrm{st}\, f - 1)$.
Potom pre $x = c$ platí $f(c) = 0 + r$.

Dôsledok. *Ak c je koreňom polynómu f, tak polynóm g, $g(x) = x - c$, delí polynóm f bez zvyšku.*

Hornerova schéma

Schéma zjednodušuje delenie polynómu lineárnym polynómom v tvare $g(x) = x - c$. Princíp schémy je vysvetlený na delení polynómu 3. stupňa. Nech

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Po vydelení polynómom $g(x) = x - c$ dostaneme $f(x) = q(x)(x - c) + f(c)$, kde $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$.V nasledujúcej tabuľke 3. riadok vznikne súčtom 1. a 2. riadku.

$f(x)$	a_3	a_2	a_1	a_0
c		cb_2	cb_1	cb_0
$q(x)$	$b_2 = a_3$	$b_1 = a_2 + cb_2$	$b_0 = a_1 + cb_1$	$f(c) = a_0 + cb_0$

Definícia. *Polynóm f nad R (nad C) stupňa aspoň 1 sa nazýva ireducibilný, ak sa nedá zapísať ako súčin dvoch polynómov aspoň 1. stupňa.*

Veta. *Nech $a_0, a_1, \cdots, a_n \in R$ a nech číslo $c = a + ib$, $a, b \in R$, je koreň polynómu $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$. Potom aj komplexne združené číslo $\overline{c}$ je koreňom polynómu f.*

Definícia. *Nech c je koreň polynómu f. Hovoríme, že c je koreň násobnosti $k \in N$, ak $f(x) = (x - c)^k g(x)$, pričom platí $g(c) \neq 0$.*

Veta. *Každý polynóm $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,\ n \in N,\ a_n \neq 0$ sa dá rozložiť na súčin mocnín ireducibilných polynómov nad R, nad C.*

Rozklad nad C: $f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \cdots (x - c_m)^{k_m},\ m \in N$, kde $c_1, c_2, \cdots, c_m \in C$ sú korene polynómu f, $k_1, k_2, \cdots, k_m \in N$ sú násobnosti koreňov, pričom platí $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

Rozklad nad R:
$f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \cdots (x - c_r)^{k_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}$, $r, s \in N \cup \{0\}$, kde $c_1, c_2, \cdots, c_r \in R$ sú korene polynómu f, $k_1, k_2, \cdots, k_r \in N$ sú násobnosti koreňov, $p_i, q_i \in R,\ p_i^2 - 4q_i < 0,\ i = 1, 2, \cdots, s$, pričom platí $k_1 + k_2 + \cdots + k_r + 2\,(l_1 + l_2 + \cdots + l_s) = n$.

Veta (O racionálnych koreňoch polynómu). *Nech $a_0, a_1, \cdots, a_n \in Z,\ a_n \neq 0$. Nech $\frac{p}{q}$ je racionálne číslo v základnom tvare. Ak $\frac{p}{q}$ je koreňom polynómu $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, tak p je deliteľom čísla a_0 a q je deliteľom a_n.*

Racionálne funkcie

Definícia. *Nech f, g sú polynómy nad R (nad C) a nech $g \neq 0$. Potom $R = \frac{f}{g}$ sa nazýva racionálna funkcia nad R (nad C). Ak $st\,f < st\,g$, tak R sa nazýva rýdzo racionálna funkcia.*

Definícia.
1. Elementárnym zlomkom nad C sa nazýva rýdzo racionálna funkcia

$$R(x) = \frac{A}{(x - c)^n},\ A, c \in C,\ n \in N.$$

2. Elementárnym zlomkom nad R sa nazývajú rýdzo racionálne funkcie

$$R_1(x) = \frac{A}{(x - c)^n},\ A, c \in R,\ n \in N,$$

$$R_2(x) = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n},\ B, C, p, q \in R,\ n \in N,\ p^2 - 4q < 0.$$

Veta. *Každá racionálna funkcia sa dá jednoznačne zapísať (až na poradie sčítancov) ako súčet polynómu a elementárnych zlomkov nad R (nad C).*

Postup rozkladu racionálnej funkcie na elementárne zlomky nad R (nad C)
1. Ak st $f \geq$st g, tak vydelíme polynóm f polynómom g so zvyškom r, $R = h + \frac{r}{g}$.
2. Nájdeme rozklad polynómu g na súčin mocnín ireducibilných polynómov nad R (nad C).
3. Rýdzo racionálnu funkciu $\frac{r}{g}$ zapíšeme ako súčet elementárnych zlomkov s neurčitými koeficientami (počet koeficientov je rovný stupňu polynómu g):

Polynóm v rozklade g		Elementárne zlomky
$(x-c)^k$	$\longrightarrow$	$\dfrac{A_1}{x-c} + \dfrac{A_2}{(x-c)^2} + \cdots + \dfrac{A_k}{(x-c)^k}$ nad R (nad C)
$(x^2+px+q)^k$	$\longrightarrow$	$\dfrac{B_1 + C_1}{x^2+px+q} + \dfrac{B_2 + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \dfrac{B_k + C_k}{(x^2+px+q)^k}$ nad R

4. Vypočítame koeficienty.

Lineárna závislosť a nezávislosť prvkov R^n, C^n

$R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in R,\ i = 1, \ldots, n\}$ — množina všetkých usporiadaných n-tíc nad R.
$C^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in C,\ i = 1, \ldots, n\}$ — množina všetkých usporiadaných n-tíc nad C.

Definícia (Súčet a násobok skalárom).
Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n (\in C^n),\ \alpha \in R (\in C)$. *Potom*
(1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
(2) $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

Definícia (Lineárna kombinácia prvkov). *Nech* $k \in N,\ \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in C^n$. *Ak* $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in C\colon \mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k$, *tak* $\mathbf{x}$ *sa nazýva lineárnou kombinácoiu prvkov* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Definícia. *Prvky* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in C^n$ *sa nazývajú lineárne nezávislé, ak majú nasledujúcu vlastnosť: ak* $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, *tak* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. *Prvky* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in C^n$ *sa nazývajú lineárne závislé, ak aspoň jeden koeficient je nenulový, t.j.* $\exists \alpha_i \neq 0$.

Veta. *Prvky* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in C^n$ *sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden prvok je lineárnou kombináciou ostatných prvkov.*

Sústavy lineárnych rovníc

Definícia matice. *Tabuľka reálnych (komplexných čísel)*

$$a_{ij},\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\ \textit{sa}$$

nazýva matica typu $m\times n$ nad reálnymi (komplexnými) číslami. Usporiadaná n-tica $R_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})$ sa nazýva i-tý riadok matice, $i=1,2,\dots,m$. Usporiadaná

$$m\text{-}tica\ S_j=\begin{pmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}\ \textit{sa nazýva j-tý stĺpec matice, } j=1,2,\dots,n.\ \textit{Ak } m=n, \textit{ tak}$$

A sa nazýva štvorcová matica.

$R^{m\times n}$ — množina všetkých matíc typu $m\times n$ nad R.
$C^{m\times n}$ — množina všetkých matíc typu $m\times n$ nad C.

Formy zápisu matice: $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}=(a_{ij})_n^m=\begin{pmatrix} R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_m\end{pmatrix}=(S_1\ S_2\ \dots\ S_n)$.

Riešenie sústav lineárnych rovníc

Sústava m rovníc s n neznámymi $m,n\in N,\ m\ge 1,\ n>1$:

$$(S_A)\qquad \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 &+& a_{12}x_2 &+& \cdots &+& a_{1n}x_n &=& b_1\\ a_{21}x_1 &+& a_{22}x_2 &+& \cdots &+& a_{2n}x_n &=& b_2\\ \vdots && \vdots && \ddots && \vdots && \vdots\\ a_{m1}x_1 &+& a_{m2}x_2 &+& \cdots &+& a_{mn}x_n &=& b_m\end{array}$$

$a_{ij},b_j\in R(C);\ i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n.$
Riešiť sústavu lineárnych rovníc znamená nájsť všetky usporiadané n-tice reálnych (komplexných) čísel, ktoré po dosadení za premenné $x_1,x_2,\dots,x_n$ vyhovujú rovniciam.

Zápis sústavy

A sa nazýva matica sústavy, A' sa nazýva rozšírená matica sústavy.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\qquad A'=A|\mathbf{b}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m\end{array}\right)$$

Definícia. *Nech $A\in C^{m\times n}$. Vedúcim prvkom riadku $R_i,\ i\in\{1,\dots,m\}$ je prvý nenulový prvok v riadku, t.j. ak $a_{ij}\ne 0$, tak $a_{i1}=a_{i2}=\cdots=a_{i,j-1}=0$. Ak $R_i=\mathbf{0}$, tak nemá vedúci prvok.*

Definícia stupňovitej matice. *Matica $A\in C^{m\times n}$ sa nazýva stupňovitá, ak platí:*
1. Ak $R_i=\mathbf{0}$, tak $R_{i+1}=\mathbf{0}, i\in\{1,2,\dots,m-1\}$.
2. Ak pre $i\in\{1,\dots,m-1\}$ je vedúci prvok riadku R_i v stĺpci S_j, tak buď $R_{i+1}=\mathbf{0}$ alebo má má vedúci prvok v stĺpci $S_k,\ k>j,\ j,k\in\{1,\dots,n\}$.

Definícia redukovanej stupňovitej matice. *Nech $A \in C^{m\times n}$ je stupňovitá matica. A sa nazýva redukovaná stupňovitá matica, ak platí:*
1. Každý vedúci prvok riadku je rovný 1.
2. Ak sa v nejakom stĺpci nachádza vedúci prvok riadku, tak všetky ostatné prvky v danom stĺpci sú nulové.

Definícia (ERO). *Elementárnou riadkovou operáciou na matici $A \in C^{m\times n}$ sa nazýva:*
1. vzájomná výmena dvoch riadkov ($R_i \longleftrightarrow R_j$),
2. vynásobenie riadku nenulovým číslom ($R_i \longrightarrow \alpha R_i,\ \alpha \in C \setminus \{0\}$),
3. pripočítanie násobku nejakého riadku k inému riadku ($R_i \longrightarrow R_i + \alpha R_j,\ i \neq j$).

Veta. *Každá matica $A \in C^{m\times n}$ sa dá pomocou konečného počtu elementárnych riadkových operácií upraviť na stupňovitú, resp. jednoznačne určenú redukovanú stupňovitú maticu.*

Definícia. *Ak $B \in C^{m\times n}$ je matica, ktorá vznikne z matice $A \in C^{m\times n}$ použitím konečného počtu ERO, tak hovoríme, že matice A, B sú ekvivalentné, označujeme $A \sim B$.*

Veta. *Ak $A' \in C^{m\times(n+1)}$ je rozšírenou maticou sústavy (S_A) a $B' \in C^{m\times(n+1)}$ je ekvivalentná s maticou A', tak B' je rozšírenou maticou sústavy (S_B), pričom množiny riešení (S_A), (S_B) sú totožné.*

Definícia (Hodnosť matice). *Maximálny počet lineárne nezávislých riadkov matice $A \in C^{m\times n}$ sa nazýva hodnosť matice, označujeme $h(A)$.*

Poznámka. Ak stupňovitá matica B je ekvivalentná s maticou A, tak hodnosť matice A je počet nenulových riadkov matice B.

Frobéniova veta. *Sústava lineárnych rovníc má riešenie práve vtedy, keď hodnosť matice sústavy sa rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy.*

Veta (matice $\longleftrightarrow$ sústavy). *Nech $A \in C^{m\times n}$ je matica sústavy, $A' \in C^{m\times(n+1)}$ je rozšírená matica sústavy lineárnych rovníc (S_A). Potom platí:*
1. Ak $h(A) \neq h(A')$, tak sústava nemá riešenie.
2. Ak $h(A) = h(A') = n$, tak sústava má práve jedno riešenie.
3. Ak $h(A) = h(A') = k < n$, tak sústava má nekonečne veľa riešení, na určenie množiny riešení potrebujeme $n-k$ parametrov.

Poznámka. Ak $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, tak (S) sa nazýva homogénna sústava, ak $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, tak (S) sa nazýva nehomogénna sústava.

Dôsledok. *Každá homogénna sústava lineárnych rovníc má aspoň jedno riešenie.*

Maticová algebra

Definícia. *Nech $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, $A,\ B \in C^{m\times n},\ \alpha \in C$. Potom*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}, \qquad \alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}.$$

Definícia. *Nech* $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le k}} \in C^{m\times k}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le n}} \in C^{k\times n}$. *Potom súčin matíc* $A \cdot B = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in C^{m\times n}$ *je definovaný:*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj},\ i = 1,\dots m,\ j = 1,\dots n.$$

Vlastnosti operácií s maticami.
$\forall\ A, B, D \in C^{m\times n},\ \forall\ \alpha, \beta \in C$ *platí:*

a)	$A + B = B + A$	*c*)	$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
b)	$(A + B) + D = A + (B + D)$	*d*)	$(\alpha\cdot\beta)A = \alpha(\beta\cdot A)$

$\forall\ A \in C^{m\times k},\ \forall\ B \in C^{k\times l},\ \forall\ D \in C^{l\times n}$ *platí:* $(A \cdot B) \cdot D = A \cdot (B \cdot D)$.
$\forall\ A, B \in C^{m\times k},\ \forall\ D \in C^{k\times n},\ \forall\ E \in C^{l\times m}$ *platí:*

$$(A + B)D = AD + BD, \qquad E(A + B) = EA + EB.$$

Poznámka. Komutatívny zákon pre súčin matíc neplatí.

<u>Transponovaná matica</u> $A^T = (a_{ji}) \in C^{n\times m}$ k matici $A = (a_{ij}) \in C^{m\times n}$.
<u>Jednotková matica</u> $I_n = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$: $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

Štvorcové matice

Definícia. *Matica* $A \in C^{n\times n}$ *sa nazýva regulárna, ak existuje matica* $B \in C^{n\times n}$ *taká, že* $AB = BA = I_n$.

Definícia. *Ak* $A, B \in C^{n\times n}$ *a platí* $AB = BA = I_n$, *tak matica* B *sa nazýva inverzná matica k matici* A, *označujeme* $B = A^{-1}$.

<u>Ako nájsť inverznú maticu k matici $A \in C^{2\times 2}$:</u>
Nech $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ a $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$. Platí $AA^{-1} = I_2$,
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ riešenie 2 sústav súčasne $\Longrightarrow$
$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^{ERO} \dots^{ERO} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \end{array}\right)$.

<u>Postup pri hľadaní inverznej matice</u> $(A|I_n) \sim^{ERO} \dots^{ERO} \sim \big(I_n|A^{-1}\big)$.

Determinanty

Definícia. *Nech* $n \in N$, $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, *nech* A_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$, *je matica, ktorá vznikne z matice* A *vynechaním riadka* R_i *a stĺpca* S_j. *Determinantom matice* A *sa nazýva číslo* $\det A = |A|$ *definované nasledovne:*
1. Ak $n = 1$, *tak* $\det A = a_{11}$.
2. Ak $n > 1$, *tak* $\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$.

Veta. *Nech* $A \in C^{n\times n},\ n > 1$. *Potom platí:*
1. Ak matica B *vznikne z matice* A *vzájomnou výmenou dvoch riadkov, tak*
$\det B = -\det A,\ (A_{R_i \leftrightarrow R_j} \sim B,\ i \neq j)$.
2. Ak matica B *vznikne z matice* A *vynásobením riadka číslom* $\alpha \in C$, *tak*
$\det B = \alpha \det A,\ (A_{\alpha R_i \to R_i} \sim B)$.
3. Ak matica B *vznikne z matice* A *pripočítaním násobku nejakého riadku k inému riadku, tak*
$\det B = \det A,\ (A_{R_i + \alpha R_j \to R_i} \sim B,\ i \neq j)$.

Označenie. Ak $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ sa nazýva algebraický doplnok k prvku a_{ij}.

Veta. *Nech* $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n},\ n > 1$. *Pre* $i, j \in \{1, \dots, n\}$ *platí:*
(a) $\det A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik}$ *(rozvoj podľa i-teho riadku).*
(b) $\det A = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{lj}\tilde{a}_{lj}$ *(rozvoj podľa j-teho stĺpca).*

Definícia. *Matica* $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ *sa nazýva*
(a) horná trojuholníková, ak $\forall i, j = 1, \dots, n$ *platí: ak* $i > j$, *tak* $a_{ij} = 0$,
(b) dolná trojuholníková, ak $\forall i, j = 1, \dots, n$ *platí: ak* $i < j$, *tak* $a_{ij} = 0$,
(c) diagonálna, ak $\forall i, j = 1, \dots, n$ *platí: ak* $i \neq j$, *tak* $a_{ij} = 0$.

Veta. *Ak* $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ *je trojuholníková matica, tak* $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Veta (Cramerovo pravidlo). *Ak matica* $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ *sústavy lineárnych rovníc s n neznámymi je regulárna, tak existuje jediné riešenie*

$$\mathbf{x} = \left(\frac{D_1}{|A|}, \frac{D_2}{|A|}, \dots, \frac{D_n}{|A|}\right),\ D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Definícia. *Nech* $A \in C^{n\times n}$, $\tilde{a}_{ij}$ *je algebraický doplnok k prvku* $a_{ij}, i, j \in \{1, \dots, n\}$.

$$\textit{Matica } \tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})^T, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \dots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

sa nazýva adjungovaná matica k matici A.

Veta. *Nech* $\tilde{A} \in C^{n\times n}$ *je adjungovaná matica k matici* $A \in C^{n\times n}$. *Potom platí:* $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)I_n$. *Ak* $det A \neq 0$, *tak* $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$.

Veta. *Nech* $A \in C^{n\times n}$. *Potom platí:*
(a) $h(A) = n \Longleftrightarrow \det A \neq 0$.
(b) $h(A) = n \Longleftrightarrow \exists A^{-1}$.

Geometria

Vektory

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in R^3, \alpha \in R$: $\quad \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), \quad \alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3).$

Definícia. *Nech* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. *Číslo* $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ *sa nazýva norma (dĺžka) vektora* $\vec{u}$. *Ak* $\|\vec{u}\| = 1$, *tak* $\vec{u}$ *sa nazýva jednotkový vektor.*

Vlastnosti normy: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in R^3, \alpha \in R$:

$$\|\vec{u}\| \geq 0, \ \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$
$$\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\|\vec{u}\|$$
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Veta.
1. Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ *sú lineárne závislé* $\Longleftrightarrow \exists \alpha \in R$: $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.
(Dajú sa umiestniť na jednu priamku).
2. Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *sú lineárne závislé* $\Longleftrightarrow \exists \alpha, \beta \in R$: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
(Dajú sa umiestniť do jednej roviny).

Uhol vektorov $\sphericalangle \vec{u}, \vec{v} = \alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ je uhol, ktorý zvierajú ľubovoľné dve umiestnenia vektorov so spoločným začiatočným bodom.

Skalárny súčin

Definícia. *Nech* $\vec{u}, \vec{v}$ *sú nenulové vektory,* $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ *je uhol vektorov. Číslo*
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\alpha$$
sa nazýva skalárny súčin vektorov $\vec{u}, \vec{v}$. *Ak* $\vec{u} = \vec{0}$ *alebo* $\vec{v} = \vec{0}$, *tak* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Veta. *Nech* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. *Potom* $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Ortogonálny priemet vektora $\vec{u}$ do smeru vektora $\vec{v}$.

Definícia. *Nech* $\vec{u}, \vec{v}$ *sú vektory,* $\vec{v} \neq \vec{0}$. *Vektor* $\vec{u}_0$ *sa nazýva ortogonálny priemet vektora* $\vec{u}$ *do smeru vektora* $\vec{v}$, *ak* $\vec{u}_0$ *je lineárne závislý s vektorom* $\vec{v}$ *a* $(\vec{u} - \vec{u}_0) \perp \vec{v}$.

Veta. *Nech* $\vec{v} \neq \vec{0}$. *Potom* $\vec{u}_0 = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$.

Dôkaz. Vektor $\vec{u}_0$ je lineárne závislý s $\vec{v} \Longrightarrow \vec{u}_0 = k\vec{v}, \ k \in R$,
$(\vec{u} - \vec{u}_0) \perp \vec{v} \Longrightarrow (\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{v} = 0 \Longrightarrow (\vec{u} - k\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \Longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = k\|\vec{v}\|^2 \Longrightarrow$
$k = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \Longrightarrow \vec{u}_0 = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$.

Vektorový súčin

Definícia. *Vektorovým súčinom vektorov* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *a* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *sa nazýva vektor*
$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Poznámka. $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$, $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$.

Vlastnosti vektorového súčinu

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^3,\ \beta \in R: \qquad \begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= -\vec{v} \times \vec{u}, \quad \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0} \\ (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} &= \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w} \\ (\beta \vec{u}) \times \vec{v} &= \beta(\vec{u} \times \vec{v}) \end{aligned}$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\alpha, \qquad \alpha = \sphericalangle \vec{u}, \vec{v},\ \alpha \in \langle 0, \pi\rangle$$

Poznámka. Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Obsah trojuholníka: $P_{\triangle_{ABC}} = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$.

Zmiešaný súčin

Definícia. *Zmiešaným súčinom vektorov* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *a* $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ *(v danom poradí) sa nazýva číslo*

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Objem rovnobežnostena určeného bodmi A, B, C, D: $V = |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})|$.

Poznámka. Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$.

Priamky v priestore a roviny

Parametrické rovnice priamky v priestore. Nech priamka p je určená bodom $A = (a_1, a_2, a_3)$ a smerovým vektorom $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Nech $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod priamky, platí

$\overrightarrow{AX} \| \vec{u} \Longrightarrow \overrightarrow{AX} = t\vec{u},\ t \in R \Longrightarrow X - A = t\vec{u} \Longrightarrow X = A + t\vec{u},\ t \in R.$

$$\begin{aligned} p\colon x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2 \\ z &= a_3 + tu_3\,, \quad t \in R \end{aligned}$$

Parametrické rovnice roviny. Nech rovina ϱ je určená bodom $A = (a_1, a_2, a_3)$ a smerovými vektormi $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Nech $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod roviny, vektory $\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ sú lineárne závislé, platí

$\overrightarrow{AX} = t\vec{u} + s\vec{v},\ t, s \in R \Longrightarrow X = A + t\vec{u} + s\vec{v},\ t, s \in R.$

$$\begin{aligned} \varrho\colon x &= a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y &= a_2 + tu_2 + sv_2 \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3\,, \quad t, s \in R \end{aligned}$$

Normálová a všeobecná rovnica roviny. Nech rovina ϱ je určená bodom $A = (a_1, a_2, a_3)$ a normálovým vektorom $\vec{n} = (a, b, c)$, $(\vec{n} \perp \varrho)$. Nech $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod roviny, platí

$\overrightarrow{AX} \perp \vec{n} \Longrightarrow \overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = 0$ a $\overrightarrow{AX} = (x - a_1, y - a_2, z - a_3) \Longrightarrow$

$$a(x - a_1) + b(y - a_2) + c(z - a_3) = 0 \qquad \textbf{normálová rovnica roviny } \varrho$$

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \textbf{všeobecná rovnica roviny } \varrho$$

Veta. *Nech rovina ϱ je určená bodom $A = (a_1, a_2, a_3)$ a smerovými vektormi $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Potom rovnica roviny ϱ je*

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

<u>Vzdialenosť bodu od priamky.</u> Nech priamka p je určená bodom B a smerovým vektorom $\vec{u}$ a nech $A \notin p$. Potom $d(A, p) = \dfrac{\|\vec{u} \times \overrightarrow{AB}\|}{\|\vec{u}\|}$.

<u>Vzdialenosť bodu od roviny.</u> Nech rovina ϱ je určená bodom B a normálovým vektorom $\vec{n}$ a nech $A \notin \varrho$. Potom $d(A, \varrho) = \dfrac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}|}{\|\vec{n}\|}$.