Funkcie

Definícia. *Nech $A \subseteq R, B \subseteq R$ sú dve množiny a f pravidlo, ktoré $\forall x \in A$ priradí jediný prvok $f(x) \in B$. Toto priradenie nazývame funkciou z množiny A do množiny B, označujeme $f\colon A \to B$.*

Poznámka. Množinu A nazývame definičný obor funkcie, označujeme $A = D(f)$, množinu B nazývame koobor funkcie.
Množinu $H(f) = \{f(x),\ x \in A\}$ nazývame obor hodnôt funkcie f.
Množinu $G(f) = \{(x, y) \in R^2\colon y = f(x),\ x \in A\}$ nazývame grafom funkcie f.

Definícia (Zúženie funkcie). *Nech $C \subset A$, $f\colon A \to R$, $g\colon C \to R$ a nech $\forall x \in C\colon f(x) = g(x)$. Funkciu f nazývame rozšírením funkcie g na množinu A, funkciu g nazývame zúžením funkcie f na množinu C, označujeme $g = f|_C$.*

Definícia (Algebraické operácie s funkciami). *Nech $f\colon A \to R$, $g\colon C \to R$ a nech $D = A \cap C \neq \emptyset$. Potom*
$f + g\colon D \to R,\ \forall x \in D\colon (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
$f \cdot g\colon\ D \to R,\ \forall x \in D\colon\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
Ak $E = A \cap \{x \in C\colon g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$, tak $\dfrac{f}{g}\colon E \to R,\ \forall x \in E\colon \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Definícia (Zložená funkcia). *Nech $f\colon A \to R$, $g\colon B \to R$ a nech $f(A) \subset B$. Funkciu $g \circ f\colon A \to R,\ \forall x \in A\colon (g \circ f)(x) = g(f(x))$, nazývame zloženou funkciou z funkcií f a g. Funkcia f sa nazýva vnútorná zložka, g vonkajšia zložka funkcie $g \circ f$.*

Poznámka. Skladanie dvoch funkcií nie je komutatívna operácia ($g \circ f \neq f \circ g$).

Definícia. *Nech A, B sú podmnožiny R, $f\colon A \to B$.*
(a) Ak pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)$, tak funkcia f sa nazýva injekcia.
(b) Ak $H(f) = B$, tak funkcia f sa nazýva surjekcia.
(c) Ak funkcia f je injekciou a surjekciou, tak sa nazýva bijekcia.

Definícia (Inverzná funkcia). *Nech $f\colon A \to B$ je bijekcia. Funkciu $f^{-1}\colon B \to A$ definovanú vzťahom $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y,\ \forall x \in A,\ y \in B$, nazývame inverznou funkciou k funkcii f.*

<u>Vlastnosti inverznej funkcie</u>

1. $\forall\, x \in A\colon\ \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \qquad f^{-1} \circ f\colon A \to A \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A.$
2. $\forall\, y \in B\colon\ \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left(f^{-1}(x)\right) = y, \qquad f \circ f^{-1}\colon B \to B \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B.$
3. $G(f^{-1}) = \{(y, x) \in B \times A\colon (x, y) \in G(f)\}$ (symetria podľa priamky $y = x$).

Definícia (Párna a nepárna funkcia).
Nech $f\colon A \to R$, nech $\forall x \in A$ platí $-x \in A$. Ak
1. $\forall x \in A\colon f(-x) = f(x)$, tak f nazývame párnou funkciou.
2. $\forall x \in A\colon f(-x) = -f(x)$, tak f nazývame nepárnou funkciou.

Definícia (Periodická funkcia).
Hovoríme, že funkcia $f\colon A \to R$ je periodická s periódou $p \neq 0$, ak platí:
1. $\forall x \in A\colon x + p \in A$,
2. $\forall x \in A\colon f(x + p) = f(x)$.
Najmenšie kladné reálne číslo s danou vlastnosťou sa nazýva základná perióda.

Definícia (Monotónne funkcie). *Nech* $f\colon A \to R$. *Ak* $\forall x_1, x_2 \in A$ *platí:*
(a) $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$, *tak* f *sa nazýva rastúca funkcia,*
(b) $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \le f(x_2)$, *tak* f *sa nazýva neklesajúca funkcia,*
(c) $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$, *tak* f *sa nazýva klesajúca funkcia,*
(d) $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \ge f(x_2)$, *tak* f *sa nazýva nerastúca funkcia.*

Veta. *Každá rýdzo monotónna (rastúca alebo klesajúca) funkcia je injekcia.*

Definícia (Ohraničené funkcie). *Nech* $f\colon A \to R$.
(a)Ak $\exists k \in R\colon \forall x \in A\colon k \le f(x)$, *tak hovoríme, že funkcia* f *je zdola ohraničená.*
(b)Ak $\exists K \in R\colon \forall x \in A\colon f(x) \le K$, *tak hovoríme, že funkcia* f *je zhora ohraničená.*
(c) Ak funkcia f *je zdola a zhora ohraničená, tak hovoríme, že je ohraničená.*

Definícia (Infimum funkcie). *Nech* $f\colon A \to R$. *Číslo* $m \in R$ *sa nazýva infimum funkcie* f, *označujeme* $m = \inf\limits_{x \in A} f(x)$, *ak platí:*
1. $\forall x \in A\colon m \le f(x)$ *(*m *je dolným ohraničením funkcie).*
2. $\forall k > m\ \exists x_k \in A\colon f(x_k) < k$ *(*m *je najväčšie dolné ohraničenie).*

Definícia (Supremum funkcie). *Nech* $f\colon A \to R$. *Číslo* $M \in R$ *sa nazýva supremum funkcie* f, *označujeme* $M = \sup\limits_{x \in A} f(x)$, *ak platí:*
1. $\forall x \in A\colon f(x) \le M$ *(*M *je horné ohraničenie funkcie).*
2. $\forall K < M\ \exists x_K \in A\colon K < f(x_K)$ *(*M *je najmenšie horné ohraničenie).*

Poznámka. Ak v definíciách nahradíme funkciu f zúžením funkcie na množinu C, $f|_C$, tak hovoríme, že f má danú vlastnosť na množine C.

Cyklometrické funkcie

1. Ak funkciu $f(x) = \sin x$ zúžime na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, tak funkcia $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}$ je rastúca, t.j. $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}\colon \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \to \langle -1, 1\rangle$ je bijekcia, existuje k nej inverzná funkcia **arkussínus**, $\arcsin = \left(\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}\right)^{-1}$, $\arcsin\colon \langle -1, 1\rangle \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle\colon\ \arcsin y = x \;\Leftrightarrow\; \sin x = y$.
2. Ak funkciu $f(x) = \cos x$ zúžime na interval $\langle 0, \pi\rangle$, tak funkcia $\cos|_{\langle 0, \pi\rangle}$ je klesajúca, t.j. $\cos|_{\langle 0, \pi\rangle}\colon \langle 0, \pi\rangle \to \langle -1, 1\rangle$ je bijekcia, existuje k nej inverzná funkcia **arkuskosínus**, $\arccos = \left(\cos|_{\langle 0, \pi\rangle}\right)^{-1}$, $\arccos\colon \langle -1, 1\rangle \to \langle 0, \pi\rangle\colon\ \arccos y = x \;\Leftrightarrow\; \cos x = y$.
3. Ak funkciu $f(x) = \operatorname{tg} x$ zúžime na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tak funkcia $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ je rastúca, t.j. $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to R$ je bijekcia, existuje k nej inverzná funkcia **arkustangens**, $\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$, $\operatorname{arctg}\colon R \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\colon\ \operatorname{arctg} y = x \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg} x = y$.
4. Ak funkciu $f(x) = \operatorname{cotg} x$ zúžime na interval $(0, \pi)$, tak funkcia $\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)}$ je klesajúca, t.j. $\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)}\colon (0, \pi) \to R$ je bijekcia, existuje k nej inverzná funkcia **arkuskotangens**, $\operatorname{arccotg} = \left(\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)}\right)^{-1}$, $\operatorname{arccotg}\colon R \to \langle 0, \pi\rangle\colon\ \operatorname{arccotg} y = x \;\Leftrightarrow\; \operatorname{cotg} x = y$.

Limita funkcie

$R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ — rozšírená reálna os.

Definícia (Okolie bodu). *Nech* $\epsilon > 0,\ a \in R$.
Množina $O_\epsilon(a) = \{x \in R\colon |x-a| < \epsilon\} = (a-\epsilon, a+\epsilon)$ *sa nazýva* ϵ*-ové okolie bodu* a, $O^\circ_\epsilon(a) = \{x \in R\colon 0 < |x-a| < \epsilon\} = (a-\epsilon, a) \cup (a, a+\epsilon)$ *sa nazýva prstencové* ϵ*-ové okolie bodu* a.
Množina $O_\epsilon(-\infty) = O^\circ_\epsilon(-\infty) = \{x \in R\colon x < -\frac{1}{\epsilon}\} = (-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$ *sa nazýva* ϵ*-ové okolie bodu* $-\infty$.
Množina $O_\epsilon(\infty) = O^\circ_\epsilon(\infty) = \{x \in R\colon x > \frac{1}{\epsilon}\} = (\frac{1}{\epsilon}, \infty)$ *sa nazýva* ϵ*-ové okolie bodu* ∞.

Definícia (Vnutorný bod). *Nech* $\emptyset \neq A \subseteq R$. *Bod* $a \in A$ *sa nazýva vnútorný bod množiny* A*, ak existuje* $O_\epsilon(a)$ *také, že* $O_\epsilon(a) \subset A$. *Množina všetkých vnútorných bodov množiny* A *sa nazýva vnútro* A *, označenie* $IntA$.

Definícia (Hromadný bod). *Nech* $\emptyset \neq A \subseteq R$. *Bod* $a \in R^*$ *sa nazýva hromadný bod množiny* A*, ak pre každé* $O^\circ_\epsilon(a)$ *platí:* $O^\circ_\epsilon(a) \cap A \neq \emptyset$.

Definícia (Limita funkcie). *Nech* $f\colon A \to R$, $a \in R^*$ *je hromadný bod množiny* A. *Hovoríme, že funkcia* f *má v bode* a *limitu* $b \in R^*$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, *ak*

$\forall O_\epsilon(b) \quad \exists O^\circ_\delta(a)\colon f\left(O^\circ_\delta(a) \cap A\right) \subset O_\epsilon(b)$.

Poznámka. Ak $b \in R$, tak hovoríme, že f má v bode a vlastnú limitu, ak $b = \pm\infty$, tak hovoríme, že f má v bode a nevlastnú limitu.

Veta (Limita zúženia funkcie). *Nech* $f\colon A \to R$, $B \subset A$, *nech* $a \in R^*$ *je hromadný bod množín* A, B. *Ak existuje* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, *tak existuje* $\lim\limits_{x\to a} \left(f\,\big|_B\right)(x) = b$.

Definícia (Jednostranné limity). *Nech* $f\colon A \to R$, *nech* $a \in R^*$ *je hromadný bod množín* $A \cap (-\infty, a)$, $A \cap (a, \infty)$.
1. Limita $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \left(f\,\big|_{A\cap(-\infty,a)}\right)(x)$ *sa nazýva limita funkcie* f *v bode* a *zľava.*
2. Limita $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \left(f\,\big|_{A\cap(a,\infty)}\right)(x)$ *sa nazýva limita funkcie* f *v bode* a *sprava.*

Veta. *Nech* $f\colon A \to R$, *nech* $a \in R^*$ *je hromadný bod* $A\cap(-\infty, a)$, $A\cap(a, \infty)$. *Potom platí: limita funkcie* f *v bode* a *existuje práve vtedy, keď existujú jednostranné limity a rovnajú sa.*

Veta (o výpočte vlastných limít). *Nech* $f, g\colon A \to R$, *a nech* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in R$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \in R$. *Potom platí:*
(a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = b + c$.
(b) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c$.
(c) *Ak* $c \neq 0$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.
(d) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$.

Veta. *Nech* $f\colon A \to R$, $a \in R^*$ *je hromadný bod množiny* A. *Ak existuje vlastná limita funkcie* f *v bode* a*, tak existuje* $O_\tau(a)$ *také, že funkcia* f *je na množine* $A \cap O_\tau(a)$ *ohraničená.*

Veta. *Nech* $f, g\colon A \to R$, *nech* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *a nech existuje* $O_\tau(a)$ *také, že funkcia* g *je na množine* $A \cap O_\tau(a)$ *ohraničená. Potom* $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Veta. *Nech* $f, g\colon A \to R$, *nech* $\forall x \in A \setminus \{a\}\colon f(x) \le g(x)$. *Ak existuje* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *a existuje* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *tak platí:* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Dôsledok. *Nech* $f, g, h\colon A \to R$, *nech* $\forall x \in A \setminus \{a\} : f(x) \le h(x) \le g(x)$. *Ak existujú limity funkcií* f, g *v bode* a *a* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, *tak existuje* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$.

Veta (o limite zloženej funkcie). *Nech* $f\colon A \to R$, $g\colon B \to R$ *a nech* $f(A) \subseteq B$. *Ak existuje* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\forall x \in A \setminus \{a\}\colon f(x) \ne b$ *alebo* $g(b) = c$, *a existuje* $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, *tak existuje limita zloženej funkcie* $g \circ f\colon A \to R$ *v bode* a *a platí* $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$.

Veta (o výpočte nevlastných limít). *Nech* $f, g\colon A \to R$, $k \in R$. *Potom platí:*

(a) ak existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} (-f(x)) = -\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(b) ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ *a* $\forall x \in A \setminus \{a\}\colon k \le g(x)$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \infty$.

(c) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ *a* $\forall x \in A \setminus \{a\}\colon 0 < k \le g(x)$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$.

(d) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty$ *a* $\forall x \in A \setminus \{a\}\colon f(x) \ne 0$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

(d) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *a* $\forall x \in A \setminus \{a\}\colon f(x) > 0$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.