

KOMPLEXNÉ ČÍSLA

ALGEBRAICKÝ TVAR KOMPLEXNÉHO ČÍSLA

Množina komplexných čísel: $C = \{a + ib, a, b \in R\}$,
 $z = a + ib$ sa nazýva algebraický tvar komplexného čísla z ,
 $a = \operatorname{Re}(z)$ sa nazýva reálna časť z , $b = \operatorname{Im}(z)$ sa nazýva imaginárna časť z ,
 $\bar{z} = a - ib$ sa nazýva komplexne združené číslo k číslu z .

Operácie s komplexnými číslami

$$\forall a, b, c, d, \alpha \in R: \quad (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$\alpha(a + ib) = \alpha a + i\alpha b$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad ab \neq 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad i^n = i^k, \quad n = 4l + k, \quad n \in N, l \in N \cup \{0\}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Vlastnosti komplexne združených čísel

$\forall z, w \in C$ platí:

$$\begin{array}{ll} 1. & \overline{(\bar{z})} = z, \\ 2. & \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \\ 3. & \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \\ 4. & \text{ak } w \neq 0, \text{ tak } \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \end{array}$$

$$\forall z \in C \text{ platí: } a = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad b = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Absolútna hodnota komplexného čísla: $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Vlastnosti absolútnej hodnoty

$$\forall z, w \in C: \quad \begin{array}{ll} 1. & |z + w| \leq |z| + |w| \quad (\text{trojuholníková nerovnosť}) \\ 2. & |\bar{z}| = |z| \\ 3. & z\bar{z} = |z|^2 \\ 4. & |zw| = |z||w|. \end{array}$$

GONIOMETRICKÝ TVAR KOMPLEXNÉHO ČÍSLA $z \in C \setminus \{0\}$

$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde $\varphi \in (-\pi, \pi)$ sa nazýva argument komplexného čísla.

Moivreov vzorec

Nech $z \in C \setminus \{0\}$, $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Potom $\forall n \in N$ platí:

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Riešenie binomickej rovnice $z^n = c$, $c \in C \setminus \{0\}$, $n \in N$.

Ak $c = |c|(\cos \psi + i \sin \psi)$, tak binomická rovnica má práve n riešení:

$$z_k = \sqrt[n]{|c|} \left(\cos \frac{\psi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\psi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

POLYNÓMY

Definícia. Nech $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ ($\in C$). Zobrazenie, ktoré $\forall x \in R$ ($x \in C$) priradí číslo $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ sa nazýva polynóm nad R (nad C) s koeficientami $a_0, a_1, \dots, a_n$. Ak $a_n \neq 0$, tak $n \in N \cup \{0\}$ sa nazýva stupeň polynómu f , označujeme $\text{st } f = n$. Ak $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, tak f sa nazýva nulový polynóm a $\text{st } f = -\infty$.

Operácie s polynómami

Nech f, g sú polynómy nad R (nad C). Potom aj $f \pm g$, $f \cdot g$, αf sú polynómy nad R (nad C) a platí:

$$\begin{aligned} \text{st}(f \pm g) &\leq \max\{\text{st } f, \text{st } g\} \\ \text{st}(f \cdot g) &= \text{st } f + \text{st } g \\ \text{st}(\alpha f) &= \text{st } f, \quad \forall \alpha \in R \setminus \{0\} \quad (\alpha \in C \setminus \{0\}). \end{aligned}$$

Rovnosť dvoch polynómov – rovnosť koeficientov pri rovnakých mocninách.

$P(R)$ ($P(C)$) – množina všetkých polynómov nad R (nad C).

Veta (Delenie polynómu polynómom).

$\forall f, g \in P(C) \quad \exists q, r \in P(C): f = q \cdot g + r, \quad \text{st } r < \text{st } g$.

Definícia. Nech f je polynóm nad C . Číslo $c \in C$ sa nazýva koreň polynómu f , ak $f(c) = 0$.

Základná veta algebry. Každý polynóm aspoň prvého stupňa má koreň v C .

Veta. Nech f je polynóm nad C a nech $c \in C$. Potom zvyšok po delení polynómu f polynómom g , $g(x) = x - c$, sa rovná hodnote $f(c)$.

Dôkaz. Ak delíme polynóm f polynómom g , $\text{st } g = 1$, tak zvyšok r má stupeň menší ako stupeň polynómu g , t.j. buď je $\text{st } r = 0$ alebo $\text{st } r = -\infty$. Teda zvyšok je konštantou.

Platí: $\exists q \in P(C) \quad \exists r \in C: \forall x \in C: f(x) = q(x)(x - c) + r$, ($\text{st } q = \text{st } f - 1$). Potom pre $x = c$ platí $f(c) = 0 + r$.

Dôsledok. Ak c je koreňom polynómu f , tak polynóm g , $g(x) = x - c$, delí polynóm f bez zvyšku.

HORNEROVA SCHÉMA

Schéma zjednodušuje delenie polynómu lineárnym polynómom v tvare $g(x) = x - c$. Princíp schémy je vysvetlený na delení polynómu 3. stupňa. Nech

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Po vydelení polynómom $g(x) = x - c$ dostaneme $f(x) = q(x)(x - c) + f(c)$, kde $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$. V nasledujúcej tabuľke 3. riadok vznikne súčtom 1. a 2. riadku.

$f(x)$	a_3	a_2	a_1	a_0
c		cb_2	cb_1	cb_0
$q(x)$	$b_2 = a_3$	$b_1 = a_2 + cb_2$	$b_0 = a_1 + cb_1$	$f(c) = a_0 + cb_0$

Definícia. Polynóm f nad R (nad C) stupňa aspoň 1 sa nazýva ireducibilný, ak sa nedá zapísať ako súčin dvoch polynómov aspoň 1. stupňa.

Veta. Nech $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ a nech číslo $c = a + ib$, $a, b \in R$, je koreň polynómu $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Potom aj komplexne združené číslo $\bar{c}$ je koreňom polynómu f .

Definícia. Nech c je koreň polynómu f . Hovoríme, že c je koreň násobnosti $k \in N$, ak $f(x) = (x - c)^k g(x)$, pričom platí $g(c) \neq 0$.

Veta. Každý polynóm $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, $n \in N$, $a_n \neq 0$ sa dá rozložiť na súčin mocnín ireducibilných polynómov nad R , nad C .

Rozklad nad C : $f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_m)^{k_m}$, $m \in N$,

kde $c_1, c_2, \dots, c_m \in C$ sú korene polynómu f , $k_1, k_2, \dots, k_m \in N$ sú násobnosti koreňov, pričom platí $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

Rozklad nad R :

$f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_r)^{k_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}$, $r, s \in N \cup \{0\}$, kde $c_1, c_2, \dots, c_r \in R$ sú korene polynómu f , $k_1, k_2, \dots, k_r \in N$ sú násobnosti koreňov, $p_i, q_i \in R$, $p_i^2 - 4q_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, s$, pričom platí $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2(l_1 + l_2 + \dots + l_s) = n$.

Veta (O racionálnych koreňoch polynómu). Nech $a_0, a_1, \dots, a_n \in Z$, $a_n \neq 0$. Nech $\frac{p}{q}$ je racionálne číslo v základnom tvare. Ak $\frac{p}{q}$ je koreňom polynómu $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, tak p je deliteľom čísla a_0 a q je deliteľom a_n .