

GEOMETRIA

Vektory

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in R^3, \alpha \in R: \quad \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), \quad \alpha \vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3).$$

Definícia. Nech $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Číslo $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ sa nazýva norma (dĺžka) vektora $\vec{u}$. Ak $\|\vec{u}\| = 1$, tak $\vec{u}$ sa nazýva jednotkový vektor.

$$\begin{aligned} \text{Vlastnosti normy: } \forall \vec{u}, \vec{v} \in R^3, \alpha \in R: \quad & \|\vec{u}\| \geq 0, \quad \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \\ & \|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\| \\ & \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \end{aligned}$$

Veta.

1. Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ sú lineárne závislé $\Leftrightarrow \exists \alpha \in R: \vec{v} = \alpha \vec{u}$.

(Dajú sa umiestniť na jednu priamku).

2. Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sú lineárne závislé $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in R: \vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$.

(Dajú sa umiestniť do jednej roviny).

Uhol vektorov $\angle \vec{u}, \vec{v} = \alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ je uhol, ktorý zvierajú ľubovoľné dve umiestnenia vektorov so spoločným začiatočným bodom.

SKALÁRNY SÚČIN

Definícia. Nech $\vec{u}, \vec{v}$ sú nenulové vektory, $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ je uhol vektorov. Číslo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$$

sa nazýva skalárny súčin vektorov $\vec{u}, \vec{v}$. Ak $\vec{u} = \vec{0}$ alebo $\vec{v} = \vec{0}$, tak $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Veta. Nech $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Potom $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Ortogonalný priemet vektora $\vec{u}$ do smeru vektora $\vec{v}$.

Definícia. Nech $\vec{u}, \vec{v}$ sú vektory, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Vektor $\vec{u}_0$ sa nazýva ortogonalný priemet vektora $\vec{u}$ do smeru vektora $\vec{v}$, ak $\vec{u}_0$ je lineárne závislý s vektorom $\vec{v}$ a $(\vec{u} - \vec{u}_0) \perp \vec{v}$.

Veta. Nech $\vec{v} \neq \vec{0}$. Potom $\vec{u}_0 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$.

Dôkaz. Vektor $\vec{u}_0$ je lineárne závislý s $\vec{v} \Rightarrow \vec{u}_0 = k \vec{v}$, $k \in R$,

$$(\vec{u} - \vec{u}_0) \perp \vec{v} \Rightarrow (\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (\vec{u} - k \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = k \|\vec{v}\|^2 \Rightarrow$$

$$k = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \Rightarrow \vec{u}_0 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$

VEKTOROVÝ SÚČIN

Definícia. Vektorovým súčinom vektorov $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sa nazýva vektor

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

Poznámka. $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$, $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$.

Vlastnosti vektorového súčinu

$$\begin{aligned}\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^3, \beta \in R: \quad & \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}, \quad \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0} \\ & (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w} \\ & (\beta \vec{u}) \times \vec{v} = \beta(\vec{u} \times \vec{v}) \\ \|\vec{u} \times \vec{v}\| &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \alpha, \quad \alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v}), \alpha \in \langle 0, \pi \rangle\end{aligned}$$

Poznámka. Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Obsah trojuholníka: $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|.$

ZMIEŠANÝ SÚČIN

Definícia. Zmiešaným súčinom vektorov $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ (v danom poradí) sa nazýva číslo

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Objem rovnobežnostena určeného bodmi A, B, C, D : $V = |\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD})|.$

Poznámka. Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$.

PRIAMKY V PRIESTORE A ROVINY

Parametrické rovnice priamky v priestore

Nech priamka p je určená bodom $A = (a_1, a_2, a_3)$ a smerovým vektorom $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Nech $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod priamky, platí

$$\vec{AX} \parallel \vec{u} \implies \vec{AX} = t\vec{u}, \quad t \in R \implies X - A = t\vec{u} \implies X = A + t\vec{u}, \quad t \in R.$$

$$\begin{aligned}p: \quad x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2 \\ z &= a_3 + tu_3, \quad t \in R\end{aligned}$$

Parametrické rovnice roviny

Nech rovina ϱ je určená bodom $A = (a_1, a_2, a_3)$ a smerovými vektormi $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$,

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Nech $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod roviny, platí $\vec{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ sú

lineárne závislé $\implies \vec{AX} = t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in R \implies X = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in R.$

$$\begin{aligned}\varrho: \quad x &= a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y &= a_2 + tu_2 + sv_2 \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3, \quad t, s \in R\end{aligned}$$

Normálová a všeobecná rovnica roviny

Nech rovina ϱ je určená bodom $A = (a_1, a_2, a_3)$ a normálovým vektorom $\vec{n} = (a, b, c)$,

$(\vec{n} \perp \varrho)$. Nech $X = (x, y, z)$ je ľubovoľný bod roviny, platí

$$\vec{AX} \perp \vec{n} \implies \vec{AX} \cdot \vec{n} = 0 \text{ a } \vec{AX} = (x - a_1, y - a_2, z - a_3) \implies$$

$$\begin{aligned}a(x - a_1) + b(y - a_2) + c(z - a_3) &= 0 && \text{normálová rovnica roviny } \varrho \\ ax + by + cz + d &= 0 && \text{všeobecná rovnica roviny } \varrho\end{aligned}$$

Veta. Nech rovina ϱ je určená bodom $A = (a_1, a_2, a_3)$ a smerovými vektormi $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Potom rovnica roviny ϱ je

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Vzdialenosť bodu od priamky. Nech priamka p je určená bodom B a smerovým vektorom $\vec{u}$ a nech $A \notin p$. Potom $d(A, p) = \frac{\|\vec{u} \times \overrightarrow{AB}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Vzdialenosť bodu od roviny. Nech rovina ϱ je určená bodom B a normálovým vektorom $\vec{n}$ a nech $A \notin \varrho$. Potom $d(A, \varrho) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}|}{\|\vec{n}\|}$.