Funkcie

Definícia. *Nech $A \subseteq R, B \subseteq R$ sú dve množiny a f pravidlo, ktoré $\forall x \in A$ priradí jediný prvok $f(x) \in B$. Toto priradenie nazývame funkciou z množiny A do množiny B, označujeme $f\colon A \to B$.*

Poznámka. Množinu A nazývame definičný obor funkcie, označujeme $A = D(f)$, množinu B nazývame koobor funkcie.
Množinu $H(f) = \{f(x),\, x \in A\}$ nazývame obor hodnôt funkcie f.
Množinu $G(f) = \{(x,y) \in R^2\colon y = f(x),\, x \in A\}$ nazývame grafom funkcie f.

Definícia (Zúženie funkcie). *Nech $C \subset A$, $f\colon A \to R$, $g\colon C \to R$ a nech $\forall x \in C\colon f(x) = g(x)$. Funkciu f nazývame rozšírením funkcie g na množinu A, funkciu g nazývame zúžením funkcie f na množinu C, označujeme $g = f|_C$.*

Definícia (Algebraické operácie s funkciami). *Nech $f\colon A \to R$, $g\colon C \to R$ a nech $D = A \cap C \neq \emptyset$. Potom*
$f + g\colon D \to R,\ \forall x \in D\colon (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
$f \cdot g\colon\ D \to R,\ \forall x \in D\colon\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
Ak $E = A \cap \{x \in C\colon g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$, tak $\dfrac{f}{g}\colon E \to R,\ \forall x \in E\colon \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Definícia (Zložená funkcia). *Nech $f\colon A \to R$, $g\colon B \to R$ a nech $f(A) \subseteq B$. Funkciu $g \circ f\colon A \to R,\ \forall x \in A\colon (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$, nazývame zloženou funkciou z funkcií f a g. Funkcia f sa nazýva vnútorná zložka, g vonkajšia zložka funkcie $g \circ f$.*

Poznámka. Skladanie dvoch funkcií nie je komutatívna operácia ($g \circ f \neq f \circ g$).

Definícia. *Nech A, B sú podmnožiny R, $f\colon A \to B$.*
(a) Ak pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)$, tak funkcia f sa nazýva injekcia.
(b) Ak $H(f) = B$, tak funkcia f sa nazýva surjekcia.
(c) Ak funkcia f je injekciou a surjekciou, tak sa nazýva bijekcia.

Definícia (Inverzná funkcia). *Nech $f\colon A \to B$ je bijekcia. Funkciu $f^{-1}\colon B \to A$ definovanú vzťahom $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y,\ \forall x \in A,\ y \in B$, nazývame inverznou funkciou k funkcii f.*

Vlastnosti inverznej funkcie
1. $\forall\, x \in A\colon \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x, \qquad f^{-1} \circ f\colon A \to A \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$.
2. $\forall\, y \in B\colon \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left(f^{-1}(x)\right) = y, \qquad f \circ f^{-1}\colon B \to B \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$.
3. $G(f^{-1}) = \{(y,x) \in B \times A\colon (x,y) \in G(f)\}$ (symetria podľa priamky $y = x$).

Definícia (Párna a nepárna funkcia).
Nech $f\colon A \to R$, nech $\forall x \in A$ platí $-x \in A$. Ak
1. $\forall x \in A\colon f(-x) = f(x)$, tak f nazývame párnou funkciou.
2. $\forall x \in A\colon f(-x) = -f(x)$, tak f nazývame nepárnou funkciou.

Definícia (Periodická funkcia).
Hovoríme, že funkcia $f\colon A \to R$ je periodická s periódou $p \neq 0$, ak platí:
1. $\forall x \in A\colon x + p \in A$,
2. $\forall x \in A\colon f(x+p) = f(x)$.
Najmenšie kladné reálne číslo s danou vlastnosťou sa nazýva základná perióda.

Definícia (Monotónne funkcie). *Nech $f\colon A \to R$. Ak $\forall x_1, x_2 \in A$ platí:*
(a) $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)$, tak f sa nazýva rastúca funkcia,
(b) $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \leq f(x_2)$, tak f sa nazýva neklesajúca funkcia,
(c) $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2)$, tak f sa nazýva klesajúca funkcia,
(d) $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \geq f(x_2)$, tak f sa nazýva nerastúca funkcia.

Veta. *Každá rýdzo monotónna (rastúca alebo klesajúca) funkcia je injekcia.*

Definícia (Ohraničené funkcie). *Nech $f\colon A \to R$.*
(a)Ak $\exists k \in R\colon \forall x \in A\colon k \leq f(x)$, tak hovoríme, že funkcia f je zdola ohraničená.
(b)Ak $\exists K \in R\colon \forall x \in A\colon f(x) \leq K$, tak hovoríme, že funkcia f je zhora ohraničená.
(c) Ak funkcia f je zdola a zhora ohraničená, tak hovoríme, že je ohraničená.

Definícia (Infimum funkcie). *Nech $f\colon A \to R$. Číslo $m \in R$ sa nazýva infimum funkcie f, označujeme $m = \inf\limits_{x \in A} f(x)$, ak platí:*
1. $\forall x \in A\colon m \leq f(x)$ (m je dolným ohraničením funkcie).
2. $\forall k > m\ \exists x_k \in A\colon f(x_k) < k$ (m je najväčšie dolné ohraničenie).

Definícia (Supremum funkcie). *Nech $f\colon A \to R$. Číslo $M \in R$ sa nazýva supremum funkcie f, označujeme $M = \sup\limits_{x \in A} f(x)$, ak platí:*
1. $\forall x \in A\colon f(x) \leq M$ (M je horné ohraničenie funkcie).
2. $\forall K < M\ \exists x_K \in A\colon K < f(x_K)$ (M je najmenšie horné ohraničenie).

Poznámka. Ak v definíciách nahradíme funkciu f zúžením funkcie na množinu C, $f|_C$, tak hovoríme, že f má danú vlastnosť na množine C.

Cyklometrické funkcie

1. Ak funkciu $f(x) = \sin x$ zúžime na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, tak funkcia $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$ je rastúca, t.j. $\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}\colon \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \langle -1, 1 \rangle$ je bijekcia, existuje k nej inverzná funkcia **arkussínus**, $\arcsin = \left(\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}\right)^{-1}$, $\arcsin\colon \langle -1, 1 \rangle \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle\colon\ \arcsin y = x \ \Leftrightarrow\ \sin x = y$.
2. Ak funkciu $f(x) = \cos x$ zúžime na interval $\langle 0, \pi \rangle$, tak funkcia $\cos|_{\langle 0, \pi \rangle}$ je klesajúca, t.j. $\cos|_{\langle 0, \pi \rangle}\colon \langle 0, \pi \rangle \to \langle -1, 1 \rangle$ je bijekcia, existuje k nej inverzná funkcia **arkuskosínus**, $\arccos = \left(\cos|_{\langle 0, \pi \rangle}\right)^{-1}$, $\arccos\colon \langle -1, 1 \rangle \to \langle 0, \pi \rangle\colon\ \arccos y = x \ \Leftrightarrow\ \cos x = y$.
3. Ak funkciu $f(x) = \operatorname{tg} x$ zúžime na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tak funkcia $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ je rastúca, t.j. $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to R$ je bijekcia, existuje k nej inverzná funkcia **arkustangens**, $\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$, $\operatorname{arctg}\colon R \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\colon\ \operatorname{arctg} y = x \ \Leftrightarrow\ \operatorname{tg} x = y$.
4. Ak funkciu $f(x) = \operatorname{cotg} x$ zúžime na interval $(0, \pi)$, tak funkcia $\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)}$ je klesajúca, t.j. $\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)}\colon (0, \pi) \to R$ je bijekcia, existuje k nej inverzná funkcia **arkuskotangens**, $\operatorname{arccotg} = \left(\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)}\right)^{-1}$, $\operatorname{arccotg}\colon R \to \langle 0, \pi \rangle\colon\ \operatorname{arccotg} y = x \ \Leftrightarrow\ \operatorname{cotg} x = y$.

Limita funkcie

$R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ — rozšírená reálna os.

Definícia (Okolie bodu). *Nech* $\epsilon > 0,\ a \in R$.
Množina $O_\epsilon(a) = \{x \in R\colon |x-a| < \epsilon\} = (a-\epsilon, a+\epsilon)$ *sa nazýva* ϵ*-ové okolie bodu* a, $O^\circ_\epsilon(a) = \{x \in R\colon 0 < |x-a| < \epsilon\} = (a-\epsilon, a) \cup (a, a+\epsilon)$ *sa nazýva prstencové* ϵ*-ové okolie bodu* a.
Množina $O_\epsilon(-\infty) = O^\circ_\epsilon(-\infty) = \{x \in R\colon x < -\frac{1}{\epsilon}\} = (-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$ *sa nazýva* ϵ*-ové okolie bodu* $-\infty$.
Množina $O_\epsilon(\infty) = O^\circ_\epsilon(\infty) = \{x \in R\colon x > \frac{1}{\epsilon}\} = (\frac{1}{\epsilon}, \infty)$ *sa nazýva* ϵ*-ové okolie bodu* ∞.

Definícia (Vnutorný bod). *Nech* $\emptyset \neq A \subseteq R$. *Bod* $a \in A$ *sa nazýva vnútorný bod množiny* A, *ak existuje* $O_\epsilon(a)$ *také, že* $O_\epsilon(a) \subset A$. *Množina všetkých vnútorných bodov množiny* A *sa nazýva vnútro* A *, označenie* $IntA$.

Definícia (Hromadný bod). *Nech* $\emptyset \neq A \subseteq R$. *Bod* $a \in R^*$ *sa nazýva hromadný bod množiny* A, *ak pre každé* $O^\circ_\epsilon(a)$ *platí:* $O^\circ_\epsilon(a) \cap A \neq \emptyset$.

Definícia (Limita funkcie). *Nech* $f\colon A \to R$, $a \in R^*$ *je hromadný bod množiny* A. *Hovoríme, že funkcia* f *má v bode* a *limitu* $b \in R^*$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, *ak*
$\forall O_\epsilon(b) \quad \exists O^\circ_\delta(a)\colon f\left(O^\circ_\delta(a) \cap A\right) \subset O_\epsilon(b)$.

Poznámka. Ak $b \in R$, tak hovoríme, že f má v bode a vlastnú limitu, ak $b = \pm\infty$, tak hovoríme, že f má v bode a nevlastnú limitu.

Veta (Limita zúženia funkcie). *Nech* $f\colon A \to R$, $B \subset A$, *nech* $a \in R^*$ *je hromadný bod množín* A, B. *Ak existuje* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, *tak existuje* $\lim\limits_{x\to a} \left(f\big|_B\right)(x) = b$.

Definícia (Jednostranné limity). *Nech* $f\colon A \to R$, *nech* $a \in R^*$ *je hromadný bod množín* $A \cap (-\infty, a)$, $A \cap (a, \infty)$.
1. Limita $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \left(f\big|_{A\cap(-\infty,a)}\right)(x)$ *sa nazýva limita funkcie* f *v bode* a *zľava.*
2. Limita $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \left(f\big|_{A\cap(a,\infty)}\right)(x)$ *sa nazýva limita funkcie* f *v bode* a *sprava.*

Veta. *Nech* $f\colon A \to R$, *nech* $a \in R^*$ *je hromadný bod* $A\cap(-\infty, a)$, $A\cap(a, \infty)$. *Potom platí: limita funkcie* f *v bode* a *existuje práve vtedy, keď existujú jednostranné limity a rovnajú sa.*

Veta (o výpočte vlastných limít). *Nech* $f, g\colon A \to R$, *a nech* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in R$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \in R$. *Potom platí:*
(a) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$.
(b) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c$.
(c) Ak $c \neq 0$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.
(d) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$.

Veta. *Nech* $f\colon A \to R$, $a \in R^*$ *je hromadný bod množiny* A. *Ak existuje vlastná limita funkcie* f *v bode* a, *tak existuje* $O_\tau(a)$ *také, že funkcia* f *je na množine* $A \cap O_\tau(a)$ *ohraničená.*

Veta. *Nech* $f, g\colon A \to R$, *nech* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *a nech existuje* $O_\tau(a)$ *také, že funkcia* g *je na množine* $A \cap O_\tau(a)$ *ohraničená. Potom* $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Veta. *Nech* $f, g\colon A \to R$, *nech* $\forall x \in A \setminus \{a\}\colon f(x) \le g(x)$. *Ak existuje* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *a existuje* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *tak platí:* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Dôsledok. *Nech* $f, g, h\colon A \to R$, *nech* $\forall x \in A \setminus \{a\} : f(x) \le h(x) \le g(x)$. *Ak existujú limity funkcií* f, g *v bode* a *a* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, *tak existuje* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$.

Veta (o limite zloženej funkcie). *Nech* $f\colon A \to R$, $g\colon B \to R$ *a nech* $f(A) \subseteq B$. *Ak existuje* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\forall x \in A \setminus \{a\}\colon f(x) \ne b$ *alebo* $g(b) = c$, *a existuje* $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, *tak existuje limita zloženej funkcie* $g \circ f\colon A \to R$ *v bode* a *a platí* $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$.

Veta (o výpočte nevlastných limít). *Nech* $f, g\colon A \to R$, $k \in R$. *Potom platí:*
(a) ak existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} (-f(x)) = -\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
(b) ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ *a* $\forall x \in A \setminus \{a\}\colon k \le g(x)$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \infty$.
(c) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ *a* $\forall x \in A \setminus \{a\}\colon 0 < k \le g(x)$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$.
(d) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty$ *a* $\forall x \in A \setminus \{a\}\colon f(x) \ne 0$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.
(d) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *a* $\forall x \in A \setminus \{a\}\colon f(x) > 0$, *tak* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

Spojitosť funkcie

Definícia. *Nech* $f\colon A \to R$, $a \in A$ *je hromadný bod množiny* A. *Ak existuje* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, *tak hovoríme, že funkcia* f *je spojitá v bode* a.

Definícia. *Nech* $\emptyset \ne M \subset A$. *Ak funkcia* $f\colon A \to R$ *je spojitá v každom bode množiny* M, *tak hovoríme, že* f *je spojitá na množine* M. *Ak* $M = A$, *tak hovoríme, že* f *je spojitá.*

Veta. *Nech* $f, g\colon A \to R$ *sú spojité funkcie v bode* $a \in A$. *Potom aj funkcie* $f + g, f \cdot g, |f|\colon A \to R$ *sú spojité* $a \in A$. *Ak* $a \in B = \{x \in A : g(x) \ne 0\}$, *tak aj* $\dfrac{f}{g}\colon B \to R$ *je spojitá funkcia v bode* a.

Poznámka. Všetky elementárne funkcie sú spojité.

Veta. *Nech* $f\colon A \to R$ *je spojitá funkcia v bode* $a \in A$, $g\colon B \to R$ *je spojitá funkcia v bode* $b = f(a) \in B$. *Potom zložená funkcia* $g \circ f\colon A \to R$ *je spojitá v bode* a.

Vlastnosti spojitých funkcií

Nech $a, b \in R$, $a < b$, $f\colon A \to R$, $\langle a, b\rangle \subseteq A$.

Definícia. *Hovoríme, že funkcia* f *je spojitá na intervale* $\langle a, b\rangle$, *ak* $f\big|_{\langle a,b\rangle}$ *je spojitá funkcia.*

Veta. *Ak funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$, tak na $\langle a, b\rangle$ nadobúda minimum a maximum.*

Veta. *Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech $f(a)\cdot f(b) < 0$. Potom $\exists\, c \in (a, b)\colon f(c) = 0$.*

Veta. *Nech I je interval a f je spojitá funkcia na I. Potom $f(I)$ je buď jednoprvková množina alebo interval.*

Veta. *Nech I, J sú intervaly a $f\colon I \to J$ je spojitá bijekcia. Potom $f^{-1}\colon J \to I$ je spojitá funkcia.*

Derivácia funkcie

Definícia. *Nech $f\colon A \to R$, $a \in A$ je hromadný bod množiny A. Ak existuje vlastná $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$, tak číslo $f'(a)$ sa nazýva derivácia funkcie f v bode a. Hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná v bode a.*

Definícia. *Nech $f\colon A \to R$, $A_1 = \{x \in A\colon \exists\, f'(x)\} \neq \emptyset$. Funkcia $f'\colon A_1 \to R$, ktorá bodu $x \in A_1$ priradí $f'(x)$, sa nazýva derivácia funkcie f, hovoríme, že f je diferencovateľná na množine A_1. Ak f' je spojitá funkcia, tak hovoríme, že f je spojite diferencovateľná na A_1.*

Veta(Nutná podmienka diferencovateľnosti v bode). *Ak funkcia $f\colon A \to R$ má deriváciu v bode $a \in A$, tak je v bode a spojitá.*

Veta (Derivácia súčtu, súčinu, podielu funkcií). *Nech $f, g\colon A \to R$ sú diferencovateľné funkcie, nech $c \in R$. Potom $cf, f + g, f \cdot g\colon A \to R$ sú diferencovateľné funkcie a platí:*

(a) $$[cf]' = cf'$$

(b) $$[f + g]' = f' + g'$$

(c) $$[f \cdot g]' = f'g + fg'$$

Ak $\forall\, x \in A\colon g(x) \neq 0$ tak funkcia $\frac{f}{g}\colon A \to R$ je diferencovateľná a platí:

(d) $$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Veta (Derivácia zloženej funkcie). *Nech $f\colon A \to R$, $g\colon B \to R$, $f(A) \subseteq B$ a nech f, g sú diferencovateľné funkcie. Potom $g \circ f\colon A \to R$ je diferencovateľná funkcia a platí:*

$$[g \circ f]' = (g' \circ f) f'.$$

Veta (Derivácia inverznej funkcie). *Nech I, J sú intervaly, $f\colon I \to J$ je diferencovateľná bijekcia. Potom inverzná funkcia $f^{-1}\colon J \to I$ je diferencovateľná v bodoch $y \in J\colon \left(f' \circ f^{-1}\right)(y) \neq 0$ a platí:*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Derivácie elementárnych funkcií

$$
\begin{aligned}
[c]' &= 0 && x \in R,\ c \in R \\
[x^n]' &= nx^{n-1} && x \in R,\ n \in N \\
[e^x]' &= e^x && x \in R \\
[\ln x]' &= \frac{1}{x} && x \in (0,\infty) \\
[a^x]' &= a^x \ln a && x \in R,\ a \in (0,\infty) \setminus \{1\} \\
[\log_a x]' &= \frac{1}{x \ln a} && x \in (0,\infty),\ a \in (0,\infty) \setminus \{1\} \\
[x^\alpha]' &= \alpha x^{\alpha-1} && x \in (0,\infty),\ \alpha \in R \setminus \{0\} \\
[\sin x]' &= \cos x && x \in R \\
[\cos x]' &= -\sin x && x \in R \\
[\mathrm{tg}\, x]' &= \frac{1}{\cos^2 x} && x \in R \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z\} \\
[\mathrm{cotg}\, x]' &= -\frac{1}{\sin^2 x} && x \in R \setminus \{k\pi,\ k \in Z\} \\
[\arcsin x]' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && x \in (-1,1) \\
[\arccos x]' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && x \in (-1,1) \\
[\mathrm{arctg}\, x]' &= \frac{1}{1+x^2} && x \in R \\
[\mathrm{arcotg}\, x]' &= -\frac{1}{1+x^2} && x \in R
\end{aligned}
$$

Veta (Dotyčnica ku grafu funkcie). *Nech $f\colon A \to R$ je diferencovateľná v bode $a \in A$. Potom dotyčnica ku grafu funkcie v bode $T = (a, f(a))$ je daná rovnicou*

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

Derivácie vyšších rádov

$$
\begin{array}{llll}
\text{Nech} & f^{(0)}\colon A \to R & f^{(0)} = f & \\
 & f^{(1)}\colon A_1 \to R & f^{(1)} = f' & \emptyset \neq A_1 \subseteq A \\
 & f^{(2)}\colon A_2 \to R & f^{(2)} = f'' & \emptyset \neq A_2 \subseteq A_1 \subseteq A \\
 & \vdots & \vdots & \\
 & f^{(n)}\colon A_n \to R & f^{(n)} = (f^{(n-1)})' & \emptyset \neq A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq A_1 \subseteq A
\end{array}
$$

Funkcia $f^{(n)}$ sa nazýva derivácia n-tého rádu funkcie f. Hovoríme, že f je n-krát diferencovateľná na A_n. Ak $f^{(n)}$ je spojitá funkcia, tak hovoríme, že f je n-krát spojite diferencovateľná na A_n.

Vlastnosti diferencovateľných funkcií

Rolleova veta. *Nech f má nasledujúce vlastnosti:*

1. *je spojitá na $\langle a, b\rangle$,*
2. *je diferencovateľná na (a, b),*
3. *$f(a) = f(b)$.*

Potom $\exists\, c \in (a, b)\colon f'(c) = 0$.

Lagrangeova veta (Veta o prírastku funkcie).
Nech f má nasledujúce vlastnosti:

1. *je spojitá na $\langle a, b\rangle$,*
2. *je diferencovateľná na (a, b).*

Potom $\exists\, c \in (a, b)\colon \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Cauchyho veta. *Nech f, g majú nasledujúce vlastnosti:*

1. *sú spojité na $\langle a, b\rangle$,*
2. *sú diferencovateľné na (a, b) a $\forall\, x \in (a, b)\colon g'(x) \neq 0$.*

Potom $\exists\, c \in (a, b)\colon \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

L'Hospitalove pravidlá

Veta "$\left(\frac{0}{0}\right)$". *Nech $f, g\colon A \to R$, $a \in R^*$ je hromadný bod A, nech*

(a) f, g sú spojité a diferencovateľné na $A \setminus \{a\}$,
(b) $\forall\, x \in A \setminus \{a\}\colon g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$,
(c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

Ak existuje $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a rovnajú sa.

Veta "$\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$". *Nech $f, g\colon A \to R$, $a \in R^*$ je hromadný bod A, nech*

(a) f, g sú spojité a diferencovateľné na $A \setminus \{a\}$,
(b) $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = \infty$.

Ak existuje $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a rovnajú sa.

Priebeh funkcie

Definícia. *Nech $f\colon A \to R$, $a \in A$. Hovoríme, že funkcia f má v bode a*

1. *lokálne minimum (ostré lokálne minimum), ak existuje $O_\delta(a)$ také, že:*
   $\forall\, x \in O_\delta(a) \cap A\colon f(x) \geq f(a) \quad (f(x) > f(a))$,
2. *lokálne maximum (ostré lokálne maximum), ak existuje $O_\delta(a)$ také, že:*
   $\forall\, x \in O_\delta(a) \cap A\colon f(x) \leq f(a) \quad (f(x) < f(a))$.

Definícia. *Nech $f\colon A \to R$, $a \in A$. Hovoríme, že funkcia f má v bode a*

1. *globálne minimum, ak* $\quad \forall\, x \in A\colon f(x) \geq f(a)$,
2. *globálne maximum, ak* $\quad \forall\, x \in A\colon f(x) \leq f(a)$.

Definícia. *Nech* $f\colon A \to R$, $a \in \operatorname{Int} A$. *Ak* f *má v bode* a *lokálny extrém a je v bode* a *diferencovateľná, tak* $f'(a) = 0$.

Stacionárny bod — bod, v ktorom má funkcia 1. deriváciu rovnú 0.

Poznámka. Jediné body, v ktorých spojitá funkcia môže nadobúdať extrém sú krajné body definičného oboru, body, v ktorých neexistuje derivácia funkcie, stacionárne body.

Intervaly monotónnosti.

Veta (Postačujúca podmienka monotónnosti). *Nech* I *je interval, funkcia* f *je spojitá na* I *a diferencovateľná na* $\operatorname{Int} I$.

(a) *Ak* $\forall x \in \operatorname{Int} I\colon f'(x) \geq 0$, *tak* f *je neklesajúca na* I.
(b) *Ak* $\forall x \in \operatorname{Int} I\colon f'(x) > 0$, *tak* f *je rastúca na* I.
(c) *Ak* $\forall x \in \operatorname{Int} I\colon f'(x) \leq 0$, *tak* f *je nerastúca na* I.
(d) *Ak* $\forall x \in \operatorname{Int} I\colon f'(x) < 0$, *tak* f *je klesajúca na* I.

Intervaly konvexnosti, konkávnosti.

Definícia. *Nech* I *je interval, nech* $f\colon I \to R$. *Ak* $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, *platí:*

(a) $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq (<) \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$, *tak* f *sa nazýva (rýdzo)konvexná funkcia.*

(b) $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq (>) \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$, *tak* f *sa nazýva (rýdzo)konkávna funkcia.*

Veta (Postačujúca podmienka konvexnosti, konkávnosti). *Nech* I *je interval, funkcia* f *je spojitá na* I *a dvakrát diferencovateľná na* $\operatorname{Int} I$.

(a) *Ak* $\forall x \in \operatorname{Int} I\colon f''(x) \geq 0$, *tak* f *je konvexná na* I.
(b) *Ak* $\forall x \in \operatorname{Int} I\colon f''(x) > 0$, *tak* f *je rýdzo konvexná na* I.
(c) *Ak* $\forall x \in \operatorname{Int} I\colon f''(x) \leq 0$, *tak* f *je konkávna na* I.
(d) *Ak* $\forall x \in \operatorname{Int} I\colon f''(x) < 0$, *tak* f *je rýdzo konkávna na* I.

Definícia. *Nech funkcia* f *je dvakrát diferencovateľná na* $O_\delta(a)$. *Ak* $\forall x_1, x_2 \in O_\delta(a), x_1 < a < x_2\colon f''(x_1) f''(x_2) < 0$, *tak* a *sa nazýva inflexný bod funkcie.*

Taylorova veta. *Nech funkcia* f *je* $(n+1)$*-krát diferencovateľná na* $O_\delta(a)$. *Potom* $\exists c \in O_\delta(a)\ \forall x \in O_\delta(a)$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}.$$

Dôsledok. *Nech* $n \geq 2$ *je párne prirodzené číslo, funkcia* f *je* n*-krát spojite diferencovateľná na* $O_\delta(a)$, *nech* $f^{(i)}(a) = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, $f^{(n)}(a) \neq 0$. *Potom platí:*

1. *ak* $f^{(n)}(a) < 0$, *tak* f *má v bode* a *ostré lokálne maximum,*
2. *ak* $f^{(n)}(a) > 0$, *tak* f *má v bode* a *ostré lokálne minimum.*

Dôsledok. *Nech* $n \geq 3$ *je nepárne prirodzené číslo, funkcia* f *je* n*-krát spojite diferencovateľná na* $O_\delta(a)$, *nech* $f^{(i)}(a) = 0$, $i = 2, \ldots, n-1$, $f^{(n)}(a) \neq 0$. *Potom* a *je inflexný bod funkcie.*

Asymptoty bez smernice.
Priamka $x = a,\ a \in R$, sa nazýva asymptotou ku grafu funkcie, ak aspoň jedna jednostranná limita funkcie v bode a je nevlastná.

Asymptoty so smernicou.
Priamka $y = kx + q,\ a \in R$, sa nazýva asymptotou ku grafu funkcie v $\pm\infty$, ak

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in R,\ q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] \in R.$$

Priebeh funkcie — postup.
1. Definičný obor funkcie, nulové body ($x \in D(f)\colon f(x) = 0$).
2. Vlastnosti funkcie (párna, nepárna, periodická).
3. Spojitosť funkcie, limity funkcie v bodoch nespojitosti.
4. Intervaly monotónnosti funkcie.
5. Lokálne extrémy funkcie.
6. Intervaly, na ktorých je funkcia konvexná, konkávna.
7. Inflexné body funkcie.
8. Limity v krajných bodoch definičného oboru, asymptoty.
9. Graf funkcie.
10. Obor hodnôt funkcie.