

Domáca úloha cvičenie 9 - riešenie

DÚ: Uvažujte funkciu $f(x) = x - \operatorname{tg} x$ definovanú na intervale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Pomocou derivácie funkcie f vyšetrite jej monotónnosť na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Na základe toho ukážte, že $f(x) > 0$ pre každé $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ a $f(x) < 0$ pre každé $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Riešenie:

$$f'(x) = (x - \operatorname{tg} x)' = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = -\operatorname{tg}^2 x.$$

Platí:

$$f'(x) < 0 \text{ pre každé } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'(0) = 0.$$

Z toho vyplýva, že funkcia f je klesajúca na celom intervale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. V stacionárnom bode $x = 0$ nemá extrém. Keďže $f(0) = 0$ a f je klesajúca na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tak $f(x) > f(0) = 0$ pre každé $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ a $f(x) < f(0) = 0$ pre každé $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.