Domáce úlohy cvičenie 7 - riešenia

DÚ 1: Vypočítajte limitu elementárnymi úpravami:

$$\lim_{x\to-\pi}\frac{\mathbf{tg}(\pi-x)}{\pi x+x^2}$$

Riešenie:

$$\lim_{x\to-\pi}\frac{\operatorname{tg}(\pi-x)}{\pi x+x^2}=\text{"0/0"}=\lim_{x\to-\pi}\frac{\operatorname{tg}(\pi-x)}{x(\pi+x)}=\left|\begin{matrix}t=\pi+x\\ x\to-\pi\\ t\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}(2\pi-t)}{t(t-\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}(-t)}{t(t-\pi)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\operatorname{tg}t}{t(t-\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{t(\pi-t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t}{t}}{(\pi-t)\cos t}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}{\lim\limits_{t\to 0}(\pi-t)\cos t}=\frac{1}{\pi},$$

kde sme na využili, že *tangens* je π-periodická, nepárna funkcia.

DÚ 2: Určte definičný obor $D(f)$ a vyšetrite spojitosť funkcie f na $D(f)$, ak:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{5x-x^2-6}}, & \textbf{pre } x\neq 3;\\ 1, & \textbf{pre } x=3.\end{cases}$$

Riešenie:

Polynóm v čitateli výrazu pod odmocninou má dva reálne korene $x_1=3$ a $x_2=4$. Teda môžeme písať: $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$. Podobne polynóm v menovateli výrazu pod odmocninou má dva reálne korene $x_1=3$ a $x_2=2$. Teda: $5x-x^2-6=-(x-3)(x-2)=(2-x)(x-3)$.

Aby mal predpis funkcie pre $x\neq 3$ zmysel, musí pod odmocninou ležať nezáporné číslo, tj. musí platiť:

$$x^2-7x+12\geq 0 \text{ a súčasne } 5x-x^2-6>0$$

alebo

$$x^2-7x+12\leq 0 \text{ a súčasne } 5x-x^2-6<0.$$

Máme $x^2-7x+12\geq 0$, ak $x\leq 3$ alebo ak $x\geq 4$, $x^2-7x+12\leq 0$ pre $x\in\langle 3,4\rangle$. $5x-x^2-6>0$, ak $x\in(2,3)$ a $5x-x^2-6<0$, ak $x<2$ alebo ak $x>3$. Prvá podmienka je teda splnená, ak $x\in(2,3)$. Druhú podmienku možno splniť v tom prípade, ak $x\in(3,4\rangle$. Celkovo preto máme:

$$x\in(2,3)\cup(3,4\rangle.$$

Funkcia f je však definovaná aj v bode $x=3$ a platí $f(3)=1$, preto $\boldsymbol{D(f)=(2,4\rangle}$.

Funkcia f je spojitá v ktoromkoľvek bode $x_0\in D(f), x_0\neq 3$. Ukážeme:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{5x-x^2-6}}=\lim_{x\to x_0}\sqrt{\frac{(x-3)(x-4)}{(2-x)(x-3)}}=\lim_{x\to x_0}\sqrt{\frac{x-4}{2-x}}=\sqrt{\frac{x_0-4}{2-x_0}}=f(x_0).$$

Je však spojitá aj v bode 3:

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{5x-x^2-6}} = "\sqrt{0/0}" = \lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{(x-3)(x-4)}{(2-x)(x-3)}} = \lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-4}{2-x}} = \sqrt{\frac{3-4}{2-3}} = 1 = f(3).$$

Záver: **Funkcia f je spojitá v každom bode svojho definičného oboru.**