

Domáca úloha cvičenie 4 - riešenie

Úloha: Uvažujte funkciu $f: \langle 3, \infty \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, $f(x) = \sqrt{1 - \frac{8}{2^x}}$. Overte, že funkcia f je na intervale $\langle 3, \infty \rangle$ dobre definovaná. Zistite, či je na $\langle 3, \infty \rangle$ injektívna. Ak je, nájdite k nej inverznú funkciu.

Riešenie:

Aby funkcia f bola na $\langle 3, \infty \rangle$ dobre definovaná, musí pre každé $x \in \langle 3, \infty \rangle$ platiť $1 - \frac{8}{2^x} \geq 0$. Z toho, že $x \geq 3$ máme:

$$2^x \geq 2^3 = 8 \Rightarrow 1 \geq \frac{8}{2^x} \Rightarrow 1 - \frac{8}{2^x} \geq 0.$$

Funkcia f je na $\langle 3, \infty \rangle$ dobre definovaná.

Funkcia je na $\langle 3, \infty \rangle$ injektívna, pretože pre každé $x_1, x_2 \in \langle 3, \infty \rangle$ platí: ak $f(x_1) = f(x_2)$, tak $x_1 = x_2$. Ukážeme:

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - \frac{8}{2^{x_1}}} &= \sqrt{1 - \frac{8}{2^{x_2}}}, \\ 1 - \frac{8}{2^{x_1}} &= 1 - \frac{8}{2^{x_2}}, \\ \frac{8}{2^{x_1}} &= \frac{8}{2^{x_2}}, \\ 2^{x_1} &= 2^{x_2}, \\ x_1 &= x_2.\end{aligned}$$

Prípadne možno ukázať, že f je na $\langle 3, \infty \rangle$ rastúca, z čoho vyplýva, že je injektívna. Ukážeme. Nech $x_1, x_2 \in \langle 3, \infty \rangle$ sú také, že $3 \leq x_1 < x_2$. Potom:

$$8 = 2^3 \leq 2^{x_1} < 2^{x_2}, \tag{1}$$

kde sme využili, že funkcia 2^x je rastúca. Z (1) ďalej máme:

$$\begin{aligned}0 &< \frac{8}{2^{x_2}} < \frac{8}{2^{x_1}} \leq 1, \\ 0 &> -\frac{8}{2^{x_2}} > -\frac{8}{2^{x_1}} \geq -1, \\ 1 &> 1 - \frac{8}{2^{x_2}} > 1 - \frac{8}{2^{x_1}} \geq 0,\end{aligned}$$

$$f(x_2) = \sqrt{1 - \frac{8}{2^{x_2}}} > \sqrt{1 - \frac{8}{2^{x_1}}} = f(x_1),$$

kde v poslednom kroku sme využili, že funkcia druhej odmocniny je rastúca.

Ostáva nájsť inverznú funkciu:

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{1 - \frac{8}{2^x}}, \\y^2 &= 1 - \frac{8}{2^x}, \\\frac{8}{2^x} &= 1 - y^2, \\2^x &= \frac{8}{1 - y^2}, \\x &= \log_2 \left(\frac{8}{1 - y^2} \right).\end{aligned}\tag{2}$$

Tento postup dáva predpis inverznej funkcie, ale zároveň určuje, že pre každé $y \in \langle 0, 1 \rangle$ existuje $x \in \langle 3, \infty \rangle$ - teda f je surjekcia, a súčasne, že také x je jediné, určené vzťahom (2) – teda f je injekcia.

Inverzná funkcia k funkcii f je teda funkcia f^{-1} taká, že:

$$f^{-1}: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 3, \infty \rangle, f^{-1}(x) = \log_2 \left(\frac{8}{1 - x^2} \right).$$