# Domáca úloha cvičenie 3 - riešenie

**Úloha: Nájdite inverznú maticu k matici**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$

**Vypočítajte $\boldsymbol{A}^{\mathbf{1349}}$.**

*Riešenie:*

Nájsť inverznú maticu môžeme viacerými cestami, napr.:

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_1 := R_1 - R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 := R_2 + 4R_1}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right) \underset{R_2 := -R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \underset{R_1 := R_1 + R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) = (I_2|A^{-1})$$

alebo z:

$$\det A = (-3)3 - 2(-4) = -9 + 8 = -1$$

máme:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = (-1)\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $A^{-1} = A$. Skutočne je tomu tak:

$$AA = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Z toho vyplýva, že $A^2 = I_2$ a teda $A^3 = A$, $A^4 = I_2$, $A^5 = A$, atď. To môžeme zapísať takto:

$$A^n = \begin{cases} A, & \text{ak } n \in \mathbb{N} \text{ je nepárne;} \\ I_2, & \text{ak } n \in \mathbb{N} \text{ je párne.} \end{cases}$$

Ak je totiž $n \in \mathbb{N}$ párne číslo, tak $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Potom:

$$A^n = A^{2k} = (A^2)^k = (I_2)^k = I_2.$$

Ak $n \in \mathbb{N}$ je nepárne číslo, tak $n = 2k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}_0$. Potom:

$$A^n = A^{2k+1} = A^{2k}A = I_2A = A.$$

Prirodzené číslo 1349 je nepárne, preto $A^{1349} = A$.