Domáce úlohy cvičenie 2 - riešenia

Úloha 1: Riešte sústavu lineárnych rovníc GEM:

$$\boldsymbol{(1-i)x_1 + 2x_2 + (-3+i)x_3 = -4}$$

$$\boldsymbol{x_1 + (2+3i)x_2 + ix_3 = 5}$$

$$\boldsymbol{(1+i)x_1 + (5+7i)x_2 - x_3 = -2}$$

Riešenie:

Upravme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitú maticu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-i & 2 & -3+i & -4 \\ 1 & 2+3i & i & 5 \\ 1+i & 5+7i & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2+3i & i & 5 \\ 1-i & 2 & -3+i & -4 \\ 1+i & 5+7i & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{R_2 := R_2 + (-1+i)R_1}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2+3i & i & 5 \\ 0 & -3-i & -4 & -9+5i \\ 1+i & 5+7i & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{R_3 := R_3 - (1+i)R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2+3i & i & 5 \\ 0 & -3-i & -4 & -9+5i \\ 0 & 6+2i & -i & -7-5i \end{array}\right)$$

$$\underset{R_2 := 2R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2+3i & i & 5 \\ 0 & -6-2i & -8 & -18+10i \\ 0 & 6+2i & -i & -7-5i \end{array}\right) \underset{R_3 := R_3 + R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2+3i & i & 5 \\ 0 & -6-2i & -8 & -18+10i \\ 0 & 0 & -8-i & -25+5i \end{array}\right)$$

Riešením sú teda všetky body (x_1, x_2, x_3) z $\mathbb{C}^3$, ktoré vyhovujú rovniciam:

$$x_1 + (2+3i)x_2 + ix_3 = 5, \qquad (1)$$

$$(-3-i)x_2 - 4x_3 = -9+5i, \qquad (2)$$

$$(-8-i)x_3 = -25+5i. \qquad (3)$$

Z (3) máme:

$$\boldsymbol{x_3} = \frac{-25+5i}{-8-i} = \frac{(-5)(5-i)}{(-1)(8+i)} = 5\left(\frac{5-i}{8+i}\right)\left(\frac{8-i}{8-i}\right) = 5\frac{(5-i)(8-i)}{8^2+1^2} = \frac{5(39-13i)}{65}$$

$$= \frac{65(3-i)}{65} = \boldsymbol{3-i} \qquad (4)$$

Dosadením (4) za x_3 do (2) získame:

$$\boldsymbol{x_2} = \frac{-9+5i}{-3-i} + 4\left(\frac{3-i}{-3-i}\right) = \frac{3+i}{-3-i} = \boldsymbol{-1} \qquad (5)$$

Dosadením (5) za x_2 a (4) za x_3 do (1) dostaneme:

$$\boldsymbol{x_1} = 5 + 2 + 3i - 3i - 1 = \boldsymbol{6}$$

Sústava má jediné riešenie: $P = \{(6, -1, 3-i)\}$.

DÚ 2: Pre každé konečné reálne číslo x nájdite hodnosť matice A_x, kde:

$$\boldsymbol{A_x = \begin{pmatrix} 3 & x & 10 & 1 \\ 2 & -1 & x & 3 \\ 5 & 10 & 30 & -5 \end{pmatrix}.}$$

Riešenie:

Upravujme maticu A_x na stupňovitú maticu:

$$A_x = \begin{pmatrix} 3 & x & 10 & 1 \\ 2 & -1 & x & 3 \\ 5 & 10 & 30 & -5 \end{pmatrix} \underset{R_3 := \left(\frac{1}{5}\right) R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & x & 10 & 1 \\ 2 & -1 & x & 3 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \end{pmatrix} \underset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & x & 3 \\ 3 & x & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_2 := R_2 - 2R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & x-12 & 5 \\ 3 & x & 10 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_3 := R_3 - 3R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & x-12 & 5 \\ 0 & x-6 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

Ak $x = 6$, matica je stupňovitá a jej hodnosť je rovná 3. Ak $x \neq 6$, potom:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & x-12 & 5 \\ 0 & x-6 & -8 & 4 \end{pmatrix} \underset{R_2 := (x-6)R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & -5x+30 & x^2-18x+72 & 5x-30 \\ 0 & x-6 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_3 := 5R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & -5x+30 & x^2-18x+72 & 5x-30 \\ 0 & 5x-30 & -40 & 20 \end{pmatrix} \underset{R_3 := R_3 + R_2}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & -5x+30 & x^2-18x+72 & 5x-30 \\ 0 & 0 & x^2-18x+32 & 5x-10 \end{pmatrix} \underset{R_2 := \left(\frac{1}{x-6}\right) R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & x-12 & 5 \\ 0 & 0 & (x-2)(x-16) & 5(x-2) \end{pmatrix}$$

Ak $x = 2$, tak posledný riadok stupňovitej matice je nulový a $h(A_2) = 2$.

Ak $x \neq 2$ (vrátane $x = 6$), tak $h(A_x) = 3$.