Domáce úlohy cvičenie 10 - riešenia

DÚ 1: Uvažujte postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že $a_n = \operatorname{arctg}(\sqrt{n}) - \operatorname{arctg}(\sqrt{n+1})$. Nech $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tj. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Vyjadrite s_n explicitne a nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ako limitu postupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Riešenie:

Ak $a_n = \operatorname{arctg}(\sqrt{n}) - \operatorname{arctg}(\sqrt{n+1})$, potom:

$$s_1 = a_1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\sqrt{2}$$

$$s_2 = s_1 + a_2 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\sqrt{2} + \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\sqrt{3}$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\sqrt{4} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\sqrt{4}$$

$$\vdots$$

$$s_n = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\sqrt{n+1}$$

Ukážeme matematickou indukciou. Tvrdenie pre $n = 1$ zrejme platí, pretože $s_1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. Urobme predpoklad $s_{n-1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\sqrt{n}$, ukážeme, že potom $s_n = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\sqrt{n+1}$. Máme:

$$s_n = s_{n-1} + a_n = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\sqrt{n} + \operatorname{arctg}\sqrt{n} - \operatorname{arctg}\sqrt{n+1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\sqrt{n+1}$$

Vypočítajme:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\sqrt{n+1} = \operatorname{arctg} 1 - \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\sqrt{n+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

Súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je teda $-\frac{\pi}{4}$.

DÚ 2: Nech $a > 0$ je ľubovoľné reálne číslo. Ukážte, že rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n!}$$

konverguje pre akékoľvek a. Na základe toho vypočítajte $\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{n!}$.

Riešenie:

Označme $a_n = \frac{a^{n+1}}{n!}$, potom $a_n > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ a $a_{n+1} = \frac{a^{n+2}}{(n+1)!}$. Na dôkaz konvergencie radu použijeme D'Alembertovo limitné kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{a^{n+1}}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a.a^{n+1}n!}{(n+1)n!\,a^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = \frac{"\ a\ "}{\infty} = 0 < 1$$

Z toho vyplýva, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n!}$ konverguje. Na základe nutnej podmienky konvergencie nekonečného radu máme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{n!} = 0.$$