

PRIEBEH FUNKCIE

Príklad 1: Vyšetrite priebeh funkcie

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Riešenie:

Pri vyšetrovaní priebehu funkcie musíme kompletne naplniť desaťkrokový postup:

1. Určiť definičný obor funkcie, nájsť nulové body a priesečník grafu funkcie s osou O_y :

Predpis funkcie môžeme upraviť na tvar:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2 + x - 1}{(x - 1)^2}$$

Z toho okamžite vidno, že $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Nulové body funkcie f sú také, že $f(x) = 0$. Riešime teda rovnicu $x^2 + x - 1 = 0$. Tomu vyhovuje $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ a $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$. Príslušné priesečníky grafu funkcie s osou O_x sú body $A = (x_1, 0)$, $B = (x_2, 0)$.

Priesečník grafu funkcie s osou O_y je bod $C = (0, f(0))$, teda $C = (0, -1)$.

2. Vyšetrit' párnosť, nepárnosť funkcie, zistiť, či je funkcia periodická:

Z asymetrickosti definičného oboru vyplýva, že funkcia nie je párna, ani nepárna a nie je ani periodická.

3. Vyšetrit' spojitosť funkcie, asymptoty bez smernice:

Funkcia je spojitá (ide o podiel spojitých funkcií). Funkcia má asymptotu bez smernice (ďalej ABS) $x = c$, ak platí:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty \text{ alebo } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty.$$

V tomto prípade ABS je priamka $x = 1$, pretože:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

4. Vypočítať deriváciu funkcie a určiť intervaly monotónnosti:

To sme v tomto prípade už urobili v **príklade 6a)** z **cvičenia 9**:

$$f'(x) = \frac{1 - 3x}{(x - 1)^3}.$$

Intervaly monotónnosti funkcie: Funkcia je klesajúca na intervale $(-\infty, 1/3)$ a na intervale $(1, \infty)$.

Funkcia je rastúca na intervale $(1/3, 1)$.

5. Nájsť extrémny funkcie:

Znovu **príklad 6a)** z **cvičenia 9**:

Funkcia má v bode $\frac{1}{3}$ ostré lokálne minimum s hodnotou $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{4}$. Tomu zodpovedajúci bod na grafe označme D , teda $D = (1/3, -5/4)$.

6. Vypočítať druhú deriváciu funkcie a zistiť, kde je funkcia konvexná, konkávna:

To sme v tomto prípade už urobili v **príklade 8a)**, resp. v **príklade 11a)** z **cvičenia 9**:

$$f''(x) = \frac{6x}{(x - 1)^4}$$

Funkcia f je konvexná na $(0, 1)$ a na $(1, \infty)$, funkcia f je konkávna na $(-\infty, 0)$.

7. Nájsť extrémny funkcie:

Príklad 11a) z **cvičenia 9**:

Inflexný bod funkcie f sa nachádza v 0. Tomu zodpovedajúci bod na grafe je bod C.

8. Vypočítať limity funkcie v ∞ , v $-\infty$ a určiť asymptoty so smernicou funkcie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

Asymptota so smernicou (ďalej ASS) je priamka $y = kx + q$. ASS počítame v ∞ aj v $-\infty$.

V prípade, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = q \in \mathbb{R}$ je ASS v ∞ priamka $y = q$ (podobne, ak $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = q \in \mathbb{R}$ je

ASS v $-\infty$ priamka $y = q$). Ak $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$, tak k, q získame z nasledujúcich limit:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - kx.$$

Ak je niektorá z týchto limit nevlastná, funkcia nemá ASS v ∞ .

Podobne, ak $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$, tak k, q získame z nasledujúcich limit:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - kx.$$

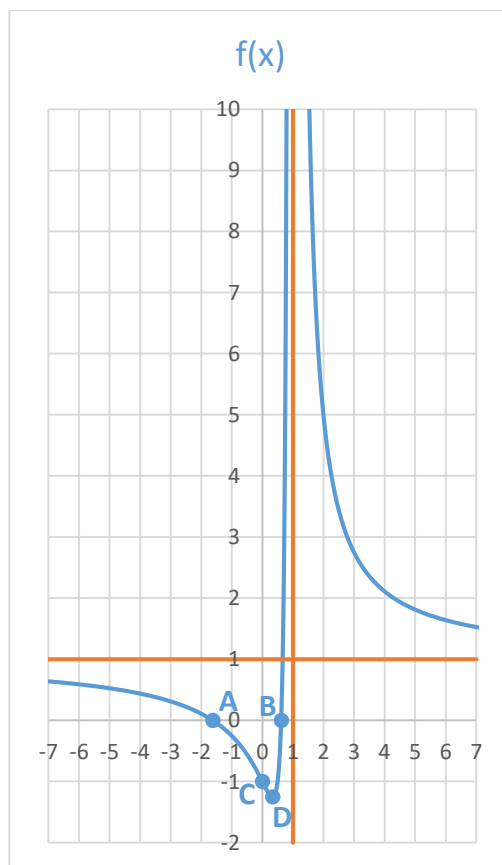
Ak je niektorá z týchto limit nevlastná, funkcia nemá ASS v $-\infty$.

V tomto prípade má funkcia f ASS v ∞ aj v $-\infty$ rovnakú a to priamku $y = 1$.

9. Určiť $H(f)$:

Určiť $H(f)$ je možné aj na záver z grafu funkcie. V tomto prípade body 3., 4., 5. a 8. indikujú, že f má v bode $\frac{1}{3}$ globálne minimum a že $H(f) = \left(-\frac{5}{4}, \infty\right)$.

10. Načrtnúť graf funkcie f :



Príklad 2: Vyšetrite priebeh funkcie

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

Riešenie:

1. $D(f) = (0, \infty)$. Nulové body: $x = 1$. Priesečník grafu funkcie s osou O_x je teda bod $A = (1, 0)$. Graf funkcie nemá priesečník s osou O_y , pretože funkcia je definovaná pre $x > 0$.

2. Definičný obor nie je súmerný podľa počiatku, z čoho vyplýva, že funkcia nie je párna, ani nepárna a nie je ani periodická.

3. Funkcia je spojitá (ide o podiel spojitých funkcií). ABS funkcie f je priamka $x = 0$, pretože platí:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

4. Z príkladu 6b) z cvičenia 9 máme:

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{3/2}}.$$

Intervaly monotónnosti funkcie: Funkcia je rastúca na intervale $(0, e^2)$.

Funkcia je klesajúca na intervale (e^2, ∞) .

5. Znovu z príkladu 6a) z cvičenia 9:

Funkcia má v bode e^2 ostré lokálne maximum s hodnotou $f(e^2) = \frac{2}{e}$. Tomu zodpovedajúci bod na grafe je teda $B = (e^2, 2/e)$.

6. Z príkladu 8b), resp. z príkladu 11b) z cvičenia 9 máme:

$$f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{5/2}}$$

Funkcia f je konvexná na $(e^{8/3}, \infty)$ a konkávna na $(0, e^{8/3})$.

7. Z príkladu 11b) z cvičenia 9:

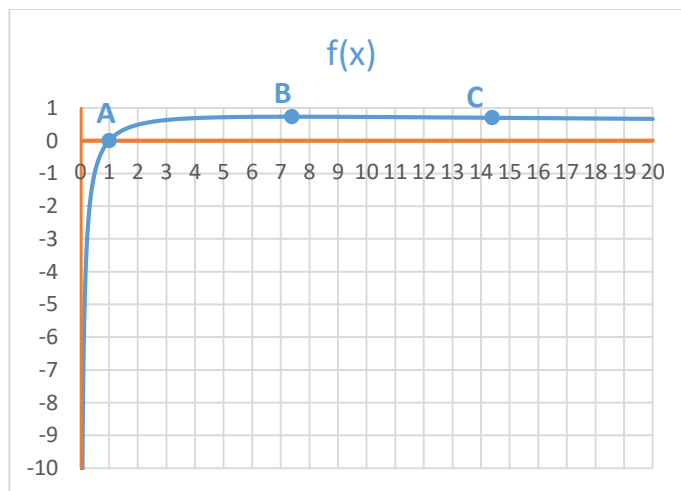
Inflexný bod funkcie sa nachádza v $e^{8/3}$. Tomu zodpovedajúci bod na grafe je bod $C = (e^{8/3}, 8/(3\sqrt{e^{8/3}}))$.

8.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

Čiže ASS v ∞ je priamka $y = 0$.

9. Body 3., 4., 5. a 8. indikujú, že f má v bode e^2 globálne maximum a že $H(f) = (-\infty, \frac{2}{e})$.

10. Graf funkcie:



Príklad 3: Vyšetrite priebeh funkcie

$$f(x) = x \operatorname{arctg} x$$

Riešenie:

1. $D(f) = \mathbb{R}$. Nulové body: $x = 0$. Priesečník grafu funkcie s osou $\mathcal{O}_x$ (a súčasne s osou $\mathcal{O}_y$) je bod $A = (0,0)$.
2. Definičný obor je súmerný podľa počiatku. Vyšetrite, či je funkcia párna alebo nepárna.

$$f(-x) = -x \operatorname{arctg}(-x) = (-x)(-\operatorname{arctg} x) = x \operatorname{arctg} x = f(x)$$

Funkcia je párna. Nie je nepárna, pretože: $f(-1) = \frac{\pi}{4} = f(1)$.

Funkcia nie je periodická, pretože má jediný nulový bod.

3. Funkcia je spojitá (ide o súčin spojitých funkcií). ABS funkcia f nemá.
4. Vypočítajte deriváciu funkcie f :

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}.$$

Zrejme $f'(0) = 0$. Ak $x < 0$, tak $\operatorname{arctg} x < 0$ a teda $f'(x) < 0$. Ak $x > 0$, tak $\operatorname{arctg} x > 0$ a teda $f'(x) > 0$.

Intervaly monotónnosti funkcie: Funkcia je rastúca na intervale $\langle 0, \infty \rangle$.

Funkcia je klesajúca na intervale $(-\infty, 0)$.

5. Funkcia má teda v bode 0 ostré lokálne minimum s hodnotou $f(0) = 0$. Tomu zodpovedajúci bod na grafe je bod A .

6. Vypočítajte druhú deriváciu funkcie f :

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

Zrejme $f''(x) > 0$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, preto je funkcia f konvexná na celom $D(f)$.

7. Zo 6.bodu vyplýva, že funkcia nemá inflexný bod.

$$\begin{aligned} 8. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg} x = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \operatorname{arctg} x = \infty \end{aligned}$$

Vyšetrite najprv ASS v ∞ :

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \frac{\pi}{2}x = \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}x = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right) = " \infty \cdot 0 " = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{"0"}{0} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -1$$

Teda ASS v ∞ je priamka $y = \frac{\pi}{2}x - 1$.

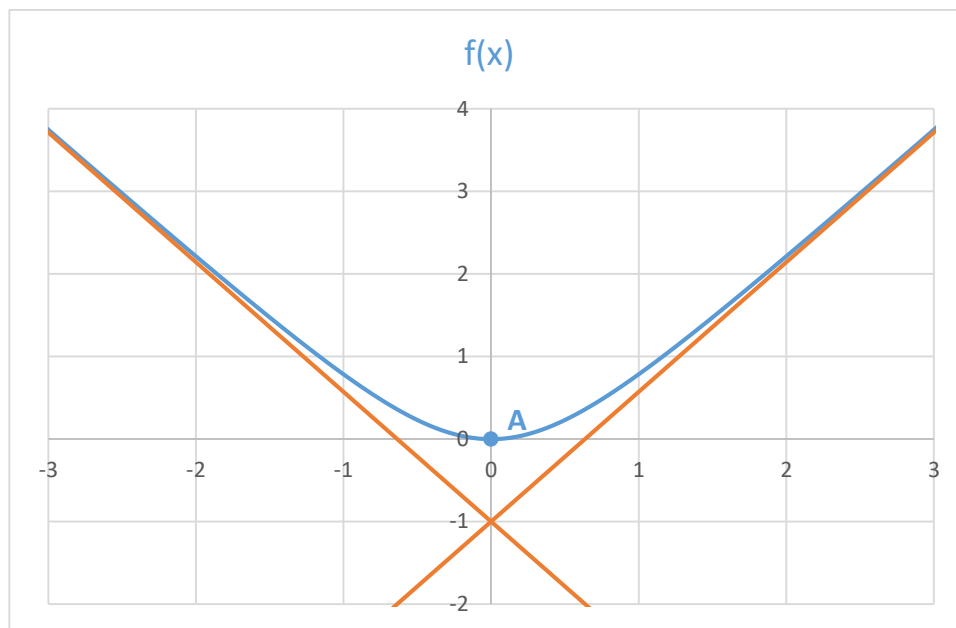
Vyšetrite teraz ASS v $-\infty$:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + \frac{\pi}{2}x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} \right) = " - \infty \cdot 0 " \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \frac{"0"}{0} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -1 \end{aligned}$$

Teda ASS v $-\infty$ je priamka $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$.

9. Body 3., 4., 5. a 8. indikujú, že f má v bode 0 globálne minimum a že $H(f) = \langle 0, \infty \rangle$.
10. Graf funkcie:



Ďalšia literatúra k cvičeniu, z ktorej môžete čerpať, sa nachádza na stránke predmetu:

<http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/Matematika1/ParalelkaC>

Ide o súbor:

1. Riesene_prikklady9-10.pdf

http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/Matematika1/ParalelkaC?action=AttachFile&do=get&target=Riesene_prikklady9-10.pdf

Konkrétne si prejdite: **13.-16.příklad.**

Domáce úlohy

DŮ 1: Určte definičný obor a nájdite všetky asymptoty funkcie $f(x) = (x + 3)e^{\frac{1}{x+1}}$.

Pomôcka: Pri výpočte niektorých limit je možné využiť, že $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.

Komentár: Úloha je za 1 prémiový bod, ktorý získajú prví pätnásť riešitelia, ktorí úlohu celú správne vyriešia. Riešenia **zasielajte výhradne** z vášho **univerzitného webmailu** alebo **stuba-gmailu** na adresu: michal.zakopcan@stuba.sk do piatku 11.12.2020, do 13:00, vo formáte pdf, jpg, jpeg alebo png. V prípade, že prvých pätnásť správnych riešení bude odovzdaných skôr, než v piatok 11.12.2020 o 13:00, mailom budete upozornení, aby ste žiadne ďalšie riešenia neposielali a termínom ukončenia zasielania riešení sa stane termín odovzdania v poradí pätnásteho správneho riešenia. Aby nedochádzalo k duplicitám, každý študent môže zaslať len jedno svoje riešenie. Nezabudnite na označenie študenta (**meno, priezvisko - uveďte čitateľne na každej strane riešenia spolu s vašim podpisom**) a poradové číslo úlohy.

DÚ 2: Určte definičný obor a nájdite všetky asymptoty funkcie $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x^2-1|}}$.

Komentár: Úloha je za 1 prémiový bod, ktorý získajú prví pätnásť riešitelia, ktorí úlohu celú správne vyriešia. Riešenia **zasielajte výhradne** z vášho **univerzitného webmailu** alebo **stuba-gmailu** na adresu: michal.zakopcan@stuba.sk do piatku 11.12.2020, do 13:00, vo formáte pdf, jpg, jpeg alebo png. V prípade, že prvých pätnásť správnych riešení bude odovzdaných skôr, než v piatok 11.12.2020 o 13:00, mailom budete upozornení, aby ste žiadne ďalšie riešenia neposielali a termínom ukončenia zasielania riešení sa stane termín odovzdania v poradí pätnásteho správneho riešenia. Aby nedochádzalo k duplicitám, každý študent môže zaslať len jedno svoje riešenie. Nezabudnite na označenie študenta (**meno, priezvisko - uveďte čitateľne na každej strane riešenia spolu s vašim podpisom**) a poradové číslo úlohy.